

UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE, INSITUT DE
MATHÉMATIQUES DE MARSEILLE : I2M

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES
MASTER 2 MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

Cat map et flot géodésique sur des
surfaces hyperboliques

amu
Aix Marseille Université



**INSTITUT
de MATHÉMATIQUES
de MARSEILLE**

BAPTISTE DUGUÉ

Encadré par : ADRIEN
BOULANGER

Avril, mai, juin 2025

Table des matières

Introduction	2
1 Systèmes dynamiques et théorie du mélange	4
1.1 Qu'est-ce qu'un système dynamique?	4
1.2 Première approche : mélange topologique	4
1.3 Système dynamique mesuré, ou comment préparer un bon smoothie	6
1.4 Le modèle-jouet de la cat map	7
1.5 Unique ergodicité	8
1.6 Théorème ergodique de Birkhoff	10
1.7 Mélange (exponentiel) de la cat map	16
2 Flot géodésique sur une surface hyperbolique	23
2.1 Rappels succincts sur la géométrie de \mathbb{H}^2	23
2.2 Ping-pong et flot géodésique sur une surface compacte	27
2.3 L'argument de Hopf	31
2.4 Flots Anosov	32
2.5 Flot horocyclique et distributions stables/instables	35
2.6 Modèle algébrique des flots	36
2.7 Mélange du flot géodésique	41
A Annexes	44
A.1 Existence d'une mesure ergodique	44
A.2 Théorie de la mesure	44
A.3 Démonstration du théorème ergodique de Birkhoff	45
A.4 Théorème d'Ascoli	46
A.5 Lemmes sous et sur-additifs	47
A.6 Lemme de Liouville sur l'approximation rationnelle	48
A.7 Topologie faible et fonctions invariantes sur les distributions stables/instables	48

Introduction

Ce mémoire peut-être vu comme une introduction à la théorie ergodique des systèmes dynamiques. L'objectif de ce texte est de présenter les notions clés de ce champ en les motivant et en les mettant en perspective à travers l'étude de plusieurs exemples, dont deux serviront de fils rouges.

Dans la première partie, on commence par se pencher sur la *cat map*, un automorphisme linéaire du tore qui est le prototype le plus élémentaire de système dynamique hyperbolique. Ces systèmes sont caractérisés par le fait que l'espace sur lequel la dynamique se mène se décompose en une somme d'espaces dilatés ou contractés par l'action du système. Si la trajectoire d'un point dépend donc à première vue fortement de la position initiale de celui-ci, nous verrons lors de notre étude que l'on peut tout de même dresser des propriétés globales. On aura pour cela recouru à la théorie de la mesure, qui nous permettra de rapidement formuler une notion naturelle de *mélange* qui fera office de boussole par la suite. Ainsi, la ligne directrice de cette première partie sera le résultat énoncé au théorème 30, à savoir que la *cat map* est mélangeante.

Après avoir fait nos premiers pas en théorie ergodique en nous amusant avec notre modèle-jouet, nous nous intéresserons au flot géodésique sur des surfaces hyperboliques compactes. Une fois de plus, on cherchera à montrer que le système considéré est mélangeant ; c'est le dernier résultat de ce mémoire, le théorème 91. Si les flots géodésiques considérés ne sont pas à proprement parler des systèmes dynamiques hyperboliques, ils appartiennent toutefois à une famille philosophiquement proche : les systèmes Anosov. En cela, la première partie est en quelque sorte un préambule à la seconde, et certains des acteurs qu'on y aura rencontrés reviendront à l'occasion jouer un rôle de plus pour illustrer les nouvelles notions présentées.

L'esprit de ce texte se veut plus proche de celui d'une balade contemplative que d'une course contre la montre. Certains résultats seront démontrés plusieurs fois, chaque démonstration illustrant alors un point de vue ou des techniques propres. Par exemple, le mélange de la *cat map* sera démontré de trois manières différentes. Plus généralement, cette autorisation à déambuler plutôt qu'à galoper vers un résultat impliquant tous les autres sera aussi pour nous l'occasion d'apprécier un panorama rempli de mathématiques aussi jolies que diverses. Pour n'en citer que quelques unes, on trouvera dans ces lignes : en première approche du mélange, de la topologie qui fera son retour dans une partie de ping-pong signature de théorie géométrique des groupes, mais aussi bien sûr de la théorie de la mesure couplée parfois à des méthodes de topologie faible, un soupçon de théorie de Fourier et de théorie de Lie et, partout où cela semblait possible, de la géométrie élémentaire ou différentielle illustrée par des dessins.

Avant de plonger dans le grand bain, je tenais à remercier très chaleureusement Adrien. Pour l'encadrement du stage qui a mené à ce mémoire bien sûr, mais aussi et surtout pour son implication, sa confiance et son enthousiasme communicatif. C'est un vrai plaisir de faire des maths et d'apprendre à faire des maths à tes côtés. Je dis « apprendre à faire des maths » parce que j'ai le sentiment que, durant ce stage, j'ai non seulement appris des mathématiques, mais j'ai aussi pris plus de recul sur la philosophie de cette activité, sur ce qu'est une bonne démonstration, un bon point de vue, une bonne hygiène mathématique, et sur l'aspect profondément humain de tout cela.

Plus généralement, je suis très reconnaissant d'avoir eu la chance de venir faire mon M2 à Marseille et j'en profite pour adresser tous mes remerciements aux professeurs qui se sont occupés de cette année et qui n'ont jamais hésité à prendre de leur temps pour répondre aux interrogations administratives, mathématiques ou plus profondes encore que je pouvais avoir. Dans cette même veine, un grand merci aux organisateurs et organisatrices de l'école d'été *Dynamique et géométrie en dimension 1,2 et 3* qui m'ont accueilli au CIRM durant la dernière semaine de mon stage, et un merci tout particulier à Martin et Ana qui ont trouvé le temps entre deux exposés de m'éclairer sur les subtilités des flots Anosov.

Je n'étais pas seul sous le soleil (parfois timide) du CIRM. Sandro a été un sacré compagnon

de route cette année et plus particulièrement pendant la période du stage, et certains bouts de ce mémoire ont été compris à deux. Merci pour ça et aussi pour ta compagnie non-mathématique, je te souhaite tout le meilleur pour la suite.

Enfin, en parlant de compagnie non-mathématique, j'ai une pensée pour mes amies non-mathématiciennes aux côtés de qui j'ai eu le plaisir de passer des moments dénués d' ε et de δ . Alice, Artémis, Elise, Loeïza, Nina, Rachel et Rosalie, j'espère recroiser rapidement vos chemins, à Marseille ou ailleurs.

1 Systèmes dynamiques et théorie du mélange

1.1 Qu'est-ce qu'un système dynamique ?

Moralement, on pourrait se contenter de dire qu'un système dynamique est « un ensemble de trucs qui bougent ». L'avantage de cette formulation est qu'elle est imprécise, ce qui fait qu'elle s'applique bien à différentes situations que l'on peut effectivement étudier via la théorie des systèmes dynamiques : des mouvements de foules, des trajectoires de planètes, l'évolution d'une réaction chimique, la propagation d'un feu de forêt, une grenouille se promenant en sautant de nénufar en nénufar, ou encore des fruits dans un mixeur...

Ici, la règle du jeu est la suivante : on définit une loi déterministe (c'est-à-dire que ses effets ne sont pas aléatoires) qui ne varie pas en fonction du temps sur la façon dont se déplacent des points d'un espace, puis on lance la machine et on observe les trajectoires qui apparaissent.

Mathématiquement, pour définir un système dynamique, on aura donc besoin d'un espace X et d'une fonction agissant sur cet espace. Ici, deux classes de systèmes apparaissent : les dynamiques discrètes (par exemple une grenouille sauteuse) et les dynamiques continues (par exemple les planètes qui suivent les lois de la mécanique). La différence entre les deux approches est la façon de modéliser le temps. Pour les systèmes à dynamique discrète, la « loi » sera une fonction $\Phi : X \rightarrow X$ que l'on appliquera successivement et le temps sera donc indexé par des entiers, et pour les systèmes à dynamique continue on se dotera d'un flot φ_t sur X . Remarquons qu'étant donné un système à temps continu, il est toujours possible de l'échantillonner pour obtenir un système à temps discret. Comme on le verra plus tard, bien souvent (mais pas toujours), ce qui est vrai pour le discret le sera aussi pour le continu, et on se contentera ainsi souvent d'énoncer les définitions ou théorèmes dans un cadre discret, même si on utilisera aussi les résultats équivalents dans un cadre continu par la suite.

Dans la suite de ce texte, on s'intéressera plus particulièrement à des systèmes disposant de propriétés analogues à celles que l'on attendrait d'un bon mixeur, et que l'on appellera « systèmes dynamiques mélangeants ».

1.2 Première approche : mélange topologique

Reprenons l'exemple du mixeur et imaginons qu'on l'ait rempli de fraises. Intuitivement, on se dit que pour que le mixeur mélange bien, il faut qu'un petit morceau de fraise, par exemple un pépin, se balade un peu partout dans le bol du mixeur quand on l'allume. Ce point de vue « ponctuel » nous donne une première piste pour formaliser l'idée de mélange.

Dans cette section, on appellera « système dynamique » (discret) (X, Φ) la donnée d'un espace topologique X et d'une application continue $\Phi : X \rightarrow X$ inversible.

Définition 1. On dit qu'un système dynamique (X, Φ) est **topologiquement transitif** s'il existe un point $x \in X$ dont l'orbite sous l'action de Φ ($\mathcal{O}_\Phi(x) := \{\Phi^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$) est dense dans X .

On dit que le système est **minimal** si pour tout point $x \in X$, l'orbite $\mathcal{O}_\Phi(x)$ est dense dans X .

Illustrons cela avec nos premiers exemples de systèmes dynamiques, un à temps discret et l'autre à temps continu.

Proposition 2. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ et R_θ la rotation associée. Si θ est irrationnel, alors le système dynamique (\mathbb{S}^1, R_θ) est minimal.

Remarque 3. Dans cet exemple, la minimalité est équivalente à l'énoncé : « il n'y a pas d'autres partie fermée invariante que l'espace tout entier », ce qui est peut-être un meilleur point de vue pour comprendre l'origine du terme « minimal ». Passons maintenant à notre première démonstration :

Démonstration. Supposons par l'absurde que $A \subset \mathbb{S}^1$ soit l'adhérence d'une orbite non dense. Le complémentaire $\mathbb{S}^1 \setminus A$ est alors un sous-ensemble non-vide, ouvert et stable par R_θ . Soit I une composante connexe de longueur maximale de $\mathbb{S}^1 \setminus A$. En particulier, I n'est pas réduite à un point puisque $\mathbb{S}^1 \setminus A$ est ouvert.

Comme R_θ préserve les longueurs, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, on a $R_\theta^n(I) \Delta R_\theta^m(I) = \emptyset$ (où $X \Delta Y$ désigne la différence symétrique entre X et Y) puisque sinon l'union de ces deux ensembles formerait une composante connexe de $\mathbb{S}^1 \setminus A$ strictement plus longue que I .

Par ailleurs, si $m \neq n$, on ne peut pas non plus avoir $R_\theta^m(I) = R_\theta^n(I)$: en effet, en voyant le cercle comme le quotient $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et en notant a une extrémité de I , on aurait alors $a + (n - m)\theta = a \pmod{1}$, donc $(n - m)\theta$ serait entier, et donc θ serait rationnel.

Ainsi, les ensembles $R^n(I)$, pour $n \in \mathbb{N}$, sont tous disjoints et de même longueur $l > 0$. Le cercle \mathbb{S}^1 admettant une longueur finie, cela est impossible. \square

Proposition 4. Soit φ le flot linéaire de vecteur $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ sur le tore \mathbb{T}^2 , c'est-à-dire le flot défini explicitement par

$$\varphi_t(x, y) = (x + t\omega_1, x + t\omega_2) \pmod{1}.$$

Si la pente $\alpha := \frac{\omega_2}{\omega_1}$ est irrationnelle, alors toutes les orbites futures du flot sont denses dans \mathbb{T}^2 .

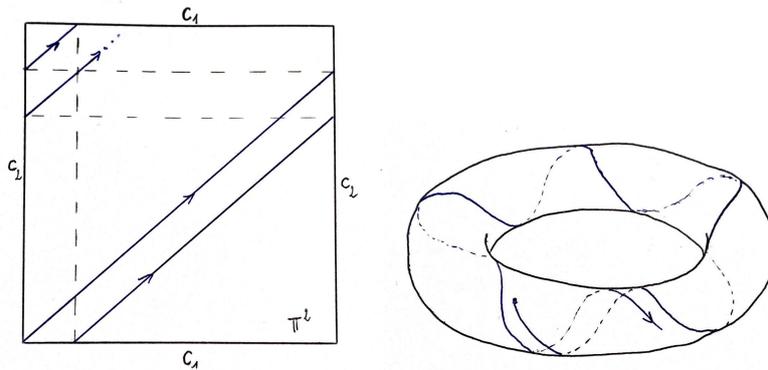


FIGURE 1 – Flots sur le tore

Démonstration. Soit $z = (x, y) \in \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et $\mathcal{O}_z^+ = \{\varphi_t(z) \mid t \geq 0\}$ la trajectoire future de z sous l'action du flot φ . En voyant \mathbb{T}^2 comme un carré de côtés 1 dont on a identifié les côtés opposés, si on note t_1, t_2, \dots les instants où la trajectoire partant de z atteint le côté droit, et en notant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = (x_n, y_n) := \varphi_{t_n}(z)$, alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(x_n, y_n) = (0, y_n) = (0, y + n\alpha) \pmod{1}.$$

Comme la pente α est irrationnelle, d'après la proposition 2, l'ensemble des points $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans \mathbb{S}^1 . Comme l'image de \mathbb{S}^1 par le flot (qui est ici une application continue) φ est égale au tore \mathbb{T}^2 tout entier, cela montre bien que \mathcal{O}_z^+ est dense dans \mathbb{T}^2 . \square

Si l'on revient à notre analogie du mixeur, on se rend compte qu'on aimerait exiger un peu mieux pour pouvoir parler de mélange. Si par exemple il nous prend l'envie de préparer un

smoothie fraise-banane, on met ces deux fruits dans notre mixeur et on veut, après avoir appuyé suffisamment longtemps sur le bouton, peu importe le moment où l'on arrête de mixer, trouver en chaque endroit du bol un mélange de fraise et de banane. Autrement dit, on ne veut pas simplement que nos fruits se baladent un peu partout dans le bol, mais bien qu'ils s'y distribuent partout en tout instant. Voilà qui nous donne notre première définition de mélange :

Définition 5. Un système dynamique (X, Φ) est **topologiquement mélangeant** si pour tous sous-ensembles ouverts et non vides $A, B \subset X$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\Phi^n(A) \cap B \neq \emptyset$.

Lorsque X est un espace métrique compact, il s'agit d'une condition plus forte que celle de « topologiquement transitif », comme le montre la caractérisation suivante :

Lemme 6. *Un système dynamique (X, Φ) (où X est un espace métrique compact) est topologiquement transitif si et seulement si pour tous sous-ensembles non vides $A, B \subset X$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\Phi^N(A) \cap B \neq \emptyset$.*

Démonstration. Si $x \in X$ est un point dont l'orbite est dense, étant donnés deux sous-ensembles non-vides A et B , par densité il existe deux entiers n, m tels que $\Phi^n(x) \in A$ et $\Phi^m(x) \in B$. En supposant $n \geq m$, on a alors $\Phi^{n-m}(A) \cap (B) \neq \emptyset$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une orbite dense et montrons que le système est topologiquement transitif. Un espace métrique compact étant séparable (pour le montrer, prendre pour chaque entier $n \geq 1$ un recouvrement ouvert fini de boules de rayons $1/n$ puis considérer l'ensemble contenant toutes les boules), on peut considérer $(B_i)_{i \geq 1}$ une base dénombrable d'ouverts de X . Pour conclure, il suffit de construire une orbite qui intersecte tous les B_i . Soit $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\Phi^{n_1}(B_1) \cap B_2 \neq \emptyset$ puis considérons V_1 un ouvert dont l'adhérence $\overline{V_1}$ soit incluse dans $B_1 \cap \Phi^{-n_1}(B_2)$. On considère de même un entier n_2 tel que $\Phi^{n_2}(V_1) \cap B_2$ soit non vide puis un ouvert V_2 tel que $\overline{V_2} \subset V_1 \cap \Phi^{-n_2}(B_3)$. On construit ainsi par récurrence une suite décroissante de compacts $(\overline{V_i})_{i \geq 1}$ d'intersection non vide. L'orbite d'un point x dans cette intersection rencontre chacun des B_i . \square

Cela dit, on peut encore mieux faire dans notre quête de la bonne définition de mélange en exigeant une distribution uniforme. Mais pour cela il va nous falloir abandonner le monde topologique pour entrer dans celui de la théorie de la mesure.

1.3 Système dynamique mesuré, ou comment préparer un bon smoothie

À la fin de la section précédente, on a introduit des définitions et caractérisations qui n'étaient plus simplement ponctuelles mais dépendaient de sous-ensembles. Dans ce cadre, on veut affiner notre analyse en quantifiant la proportion d'un ensemble qui se retrouve dans un autre. C'est dans cette optique qu'on introduit la notion de système dynamique mesuré.

Définition 7. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $\Phi : X \rightarrow X$ une application mesurable. On dit que μ est **Φ -invariante**, ou encore que Φ **préserve la mesure** μ , si

$$\forall A \in \mathcal{A}, \mu(\Phi^{-1}(A)) = \mu(A).$$

Définition 8. Un **système dynamique mesuré** est la donnée d'un espace mesuré et d'une application préservant la mesure : $(X, \mathcal{A}, \mu, \Phi)$. On écrira (souvent) plus simplement (X, μ, Φ) .

Remarque 9. Dans toute la suite, on ne prendra plus la peine de préciser que le système dynamique que l'on considère est mesuré lorsque ce sera évident.

Reprenons l'analogie du smoothie fraise-banane. Imaginons qu'on ait très envie de fraises, et qu'on mélange 200 grammes de fraises et 100 grammes de bananes. Par définition, un bon

smoothie est lisse et uniforme, aussi on s'attend à retrouver en chaque région du mixeur 1/3 de banane et 2/3 de fraise. Plus précisément, si on sert deux verres de notre préparation, on souhaite que dans chaque verre il y ait 100 grammes de fraises : on veut que les *proportions* de fruits soient les mêmes partout.

Définition 10. On dit qu'un système dynamique (X, μ, Φ) est **mélangeant**, ou que l'application Φ est **mélangeante** (ou *mixing* en anglais) si

$$\forall A, B \in \mathcal{A}, \mu(\Phi^{-n}(A) \cap B) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu(A)\mu(B).$$

Voici comment interpréter cette définition avec notre fil rouge : $\mu(A)$ représente la quantité totale de fraises dans le mixeur, B est une région du mixeur, et $\Phi^{-n}(A) \cap B$ désigne le sous-ensemble des fraises qui vont se retrouver dans la région B au temps n . Ainsi, le quotient $\mu(\Phi^{-n}(A) \cap B)/\mu(B)$ représente la proportion de fraises dans la région B au temps n , et on souhaite que cette quantité tende vers $\mu(A)$ lorsqu'on mixe longtemps ($n \rightarrow \infty$).

1.4 Le modèle-jouet de la cat map

Maintenant qu'on dispose d'une bonne définition d'un système mélangeant, on peut commencer à étudier des exemples de tels systèmes. On présente ici la *cat map*, une application sur le tore \mathbb{T}^2 qui induit un système dynamique qui va nous pousser à développer des méthodes de recherches similaires à ce qu'on retrouvera dans l'étude du flot géodésique sur une variété hyperbolique.

On munit le tore \mathbb{T}^2 de la mesure de Lebesgue, notée μ .

Considérons la matrice $M := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ que l'on fait agir par multiplication sur le plan \mathbb{R}^2 . L'action passe au quotient $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et induit une application

$$\Phi : \begin{array}{l} \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \end{pmatrix} \pmod{1} \end{array}$$

On appelle *cat map*¹ l'application Φ ainsi construite.

Les valeurs propres de M sont $\lambda_1 := \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,4$ et $\lambda_2 := \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2,6$. Un vecteur propre de M pour la valeur propre λ_1 est $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}$. Comme M est symétrique et réelle, d'après le théorème spectral, les vecteurs propres pour λ_2 sont orthogonaux à v_1 . Il y a donc deux droites orthogonales (représentées sur la figure 2) que la cat map étire ou contracte. Asymptotiquement, le tore va donc « s'enrouler » le long de la droite engendrée par le vecteur v_1 , c'est-à-dire le long d'une feuille du flot linéaire de pente $(\sqrt{5}-1)/2$, qui est donc dense d'après la proposition 4. Cela nous permet de voir facilement que la cat map est topologiquement mélangeante : si on se donne deux sous-ensembles $A, B \subset \mathbb{T}^2$, à mesure que l'on applique Φ à A , celui-ci va s'étirer le long de la direction dilatante, et un petit segment $I \subset A$ parallèle à cette direction va s'allonger de plus en plus en conservant la même pente. Comme cette pente est irrationnelle, le segment est à chaque étape un sous-ensemble plus long d'une feuille dense du flot linéaire sur le tore, et pour un nombre d'étapes assez grand le segment finira par intersecter l'ensemble B .

Nous détaillerons tout cela dans la section 1.7, lors de la démonstration de ce qui est désormais notre objectif : démontrer que la cat map est mélangeante. Pour ce faire, on va commencer par introduire une nouvelle notion qui va nous permettre de quantifier à quel point un système se mélange au fil du temps.

1. Ce nom saugrenu est une invention de Vladimir Igorevich Arnold dans [AA67], où l'auteur illustre l'action de cette application sur le tore en y dessinant un pauvre petit chat qui va bien vite devenir méconnaissable...

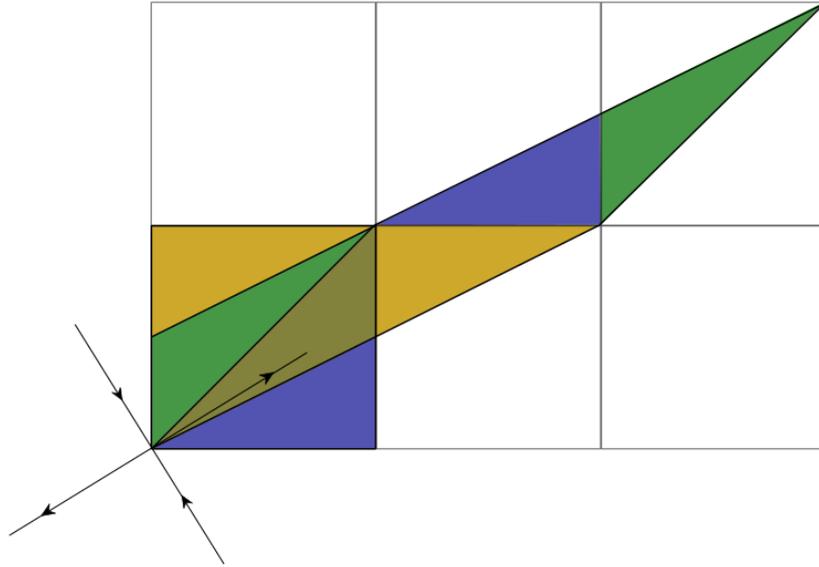


FIGURE 2 – Première itération de la cat map. Source : Wikipédia.

1.5 Unique ergodicité

À partir de maintenant, les espaces considérés seront toujours métriques et compacts, et on les munira toujours d'une mesure que l'on renormalisera pour en faire une mesure de probabilité. Pour une application continue $\Phi : X \rightarrow X$, on notera $\mathfrak{M}(\Phi)$ l'ensemble des mesures de probabilités Φ -invariantes.

A priori, un système dynamique mesuré peut sembler être un système dynamique « topologique » auquel on a adjoint une mesure, sans que cela ait une grande importance sur la nature profonde de la dynamique. Il n'en est rien, la mesure que l'on considère joue en réalité un rôle primordial sur le comportement de l'objet qu'on étudie. Pour l'illustrer, prenons un exemple extrêmement simple :

Considérons l'espace à trois éléments $X := \{a, b, c\}$ et l'application définie par $\Phi(a) = b$, $\Phi(b) = a$, $\Phi(c) = c$. Une première mesure Φ -invariante sur cet espace pourrait être $\mu := \frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_b$, et une autre pourrait être $\nu := \delta_c$ (où les $\delta_a, \delta_b, \delta_c$ désignent des mesures de Dirac). Du point de vue de μ , le système alterne entre deux états, alors que du point de vue de ν rien ne se passe.

En admettant qu'on peut toujours considérer une mesure invariante (on le démontrera bientôt en toute généralité, mais on peut déjà remarquer que si on dispose d'une orbite périodique, alors la mesure uniforme sur cette orbite est invariante), on est donc confronté au problème du choix d'une mesure pour étudier la dynamique d'une fonction. En général, ce dilemme cornélien n'a pas de solution privilégiée, sauf justement quand on n'a pas de choix à faire !

Définition 11 (Unique ergodicité). Une application continue $\Phi : X \rightarrow X$ d'un espace métrique compact X est dite **uniquement ergodique** si elle n'admet qu'une seule mesure de probabilité invariante.

La terminologie que l'on vient d'introduire est justifiée par la définition suivante et la proposition qui la suit.

Définition 12. Une mesure Φ -invariante μ est dite **ergodique** par rapport à Φ si pour

tout ensemble mesurable et Φ -invariant $A \subset X$, on a ou bien $\mu(A) = 0$, ou bien $\mu(A) = 1$.

Exemple 13. Comme on le verra bientôt, les rotations d'angle irrationnel sur le cercle fournissent des exemples de systèmes uniquement ergodiques. C'est aussi le cas des flots linéaires de pente irrationnelle sur le tore.

Remarque 14. Comme on l'a déjà souligné, chaque orbite périodique fournit une mesure invariante (la mesure uniforme sur l'orbite). En particulier, un système avec au moins deux orbites périodiques ne peut donc pas être uniquement ergodique.

Proposition 15. *L'unique mesure de probabilité invariante μ d'une application uniquement ergodique Φ est ergodique.*

Démonstration. Si μ n'était pas ergodique, on pourrait considérer un ensemble mesurable A tel que $0 < \mu(A) < 1$. Les mesures de probabilités μ_A et $\mu_{X \setminus A}$ définies par

$$\mu_A(B) = \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} \text{ et } \mu_{X \setminus A}(B) = \frac{\mu(B \cap (X \setminus A))}{\mu(X \setminus A)}$$

sont alors Φ -invariantes et distinctes puisque $\mu_A(A) = 1$ et $\mu_{X \setminus A}(A) = 0$, ce qui contredit l'unique ergodicité. \square

Remarque 16. Prenons le temps d'un petit intermède étymologique qui nous aidera à y voir plus clair. « Ergodique » provient du grec ancien $\xi\rho\gamma\omicron\nu$ (*érgon*, action/travail) et de $\delta\delta\acute{o}\varsigma$ (*hodós*, voie/route/chemin). Ce terme désigne donc l'action qui se déroule le long d'un chemin, d'une trajectoire... Et en effet c'est comme cela qu'on peut moralement construire une mesure ergodique, en choisissant une orbite sous l'action de l'application du système dynamique et en chargeant uniquement cet ensemble. Choisir une mesure, c'est donc décider que certains points sont plus intéressants que d'autres, et l'unique ergodicité est la situation dans laquelle on ne peut discriminer personne puisqu'asymptotiquement tout le monde joue le même rôle. Ce point de vue est important, il reviendra bientôt sous la forme d'un théorème.

En particulier, cette remarque nous dit aussi qu'on peut construire une mesure invariante à partir de mesures ergodiques :

Lemme 17. *Si $\mu \in \mathfrak{M}(\Phi)$ n'est pas ergodique alors c'est une combinaison linéaire convexe stricte de deux autres mesures $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}(\Phi)$.*

Démonstration. En considérant un ensemble $A \subset X$ tel que $0 < \mu(A) < 1$, on peut considérer les mesures μ_A et $\mu_{X \setminus A}$ définies dans la preuve de la proposition 15 et alors on a $\mu = \mu(A)\mu_A + (1 - \mu(A))\mu_{X \setminus A}$. \square

Les points extrémaux de $\mathfrak{M}(\Phi)$ sont donc les mesures ergodiques. Ce point de vue permet de démontrer l'existence de mesures ergodiques pour toute application continue sur un compact. Rappelons d'abord quelques points topologiques :

On munit l'ensemble des mesures sur X un espace métrique compact de la topologie faible-*, c'est-à-dire qu'une suite de mesures $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une mesure μ si pour toute fonction f continue sur X , on a $\int_X f d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu$. L'ensemble \mathfrak{M} des mesures de probabilité sur X , c'est-à-dire la boule unité, est compact pour cette topologie (c'est le théorème de Banach-Alaoglu, voir par exemple [HL99]). Pour toute application $\Phi : X \rightarrow X$, l'ensemble $\mathfrak{M}(\Phi)$ des mesures de probabilité Φ -invariantes est un sous-ensemble convexe, fermé et donc compact de \mathfrak{M} . Il est aussi toujours non-vidé : Choisissons un point $x \in X$ et introduisons la suite de mesures sur x définies par, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu_n := \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \delta_{\Phi^i(x)}.$$

Une limite faible-* de cette suite de mesures (qui existe toujours puisque, toujours par le théorème de Banach-Alaoglu, l'ensemble des mesures de probabilités sur X compact est compact) est bien Φ -invariante. On en déduit l'existence d'une mesure ergodique :

Théorème 18. *Une application continue Φ sur un espace métrique compact X y admet (au moins) une mesure ergodique.*

Démonstration. Il suffit de montrer que l'ensemble $\mathfrak{M}(\Phi)$ admet des points extrémaux. Si on connaît le théorème de Krein-Milman (en dimension infinie), le résultat est immédiat. On trouvera en annexe (A.1) une démonstration autosuffisante, dans la même philosophie que celle de la preuve du théorème de Krein-Milman. \square

Pour fixer les idées, terminons cette première rencontre avec la notion d'ergodicité en faisant le lien avec la notion de mélange :

Proposition 19. *Si un système (X, Φ, μ) est mélangeant, alors la mesure μ est ergodique par rapport à Φ .*

Démonstration. Considérons $A = \Phi^{-1}(A) \subset X$ un ensemble mesurable et Φ -invariant. Pour tout entier n , on a alors $\mu(A) = \mu(A \cap \Phi^{-n}(A))$, et comme le système est mélangeant, on a par ailleurs $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap \Phi^{-n}(A)) = \mu(A)^2$.

On a donc $\mu(A) = \mu(A)^2$, donc $\mu(A) = 0$ ou 1 . \square

1.6 Théorème ergodique de Birkhoff

Dans cette section, on approfondit plus encore le point de vue qu'on a commencé à évoquer dans la remarque 16 sur l'unique ergodicité comme situation dans laquelle tout le monde joue asymptotiquement le même rôle. On commence par donner une nouvelle définition de l'unique ergodicité qui reflète cette idée.

Définition 20 (Unique ergodicité, deuxième version). On dit qu'un système dynamique (X, μ, Φ) , ou plus simplement que l'application Φ est **uniquement ergodique** si pour toute fonction f continue sur X , il existe une constante c_f telle que la suite de fonctions de terme général $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \Phi^k$ converge uniformément sur X vers la fonction constante égale à c_f .

Dans toute la suite, étant donnée une application Φ comme ci-dessus et une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, on notera

$$S_n f := \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \Phi^k.$$

Pour tout point $x \in X$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on appellera **sommes de Birkhoff en x** ou **moyennes temporelles en x** les quantités $\frac{1}{n} S_n f(x)$. Lorsqu'elle existe, on appellera **moyenne de Birkhoff en x** la limite des sommes de Birkhoff $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} S_n f(x)$.

Remarque 21. Lorsque l'on travaille avec un système dynamique continu (X, μ, φ_t) , les moyennes temporelles deviennent

$$\frac{1}{t} \int_0^t f \circ \varphi_s ds.$$

Proposition 22. *Les deux définitions d'unique ergodicité sont équivalentes.*

Démonstration. (2) \Rightarrow (1) : Soit f continue sur X et c_f la fonction constante limite uniforme de $\frac{1}{n} S_n f$ sur X pour laquelle on note encore c_f la valeur. Si μ est une mesure Φ -invariante, on a alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_X \frac{1}{n} S_n f(x) d\mu(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_X f \circ \Phi^k(x) d\mu(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_X f(x) d\mu(x) = \int_X f d\mu.$$

Ainsi, comme X est compact et que la série de fonctions $(\frac{1}{n}S_n f)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur X vers c_f , on peut intervertir limite et intégrale afin d'obtenir

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{1}{n} S_n f d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n f d\mu = \int_X c_f d\mu = c_f.$$

D'après le théorème de représentation de Riesz-Markov (voir théorème 92 en annexe), cela implique l'unicité de μ . En effet, si on dispose d'une autre mesure de probabilité invariante $\tilde{\mu}$, on a alors pour n'importe quelle fonction continue f , $\int_X f d\mu = \int_X f d\tilde{\mu} = c_f$.

(1) \Rightarrow (2) : Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une fonction continue f pour laquelle on n'ait pas de convergence uniforme des sommes de Birkhoff. On peut alors considérer deux réels $a < b$, deux suites de points $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans X et une suite extraite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles qu'on ait simultanément, pour tout k ,

$$\frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} f(\Phi^i(x_k)) \leq a, \text{ et aussi } \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} f(\Phi^i(y_k)) \geq b.$$

Construisons maintenant de nouvelles mesures comme combinaisons linéaires des mesures de Dirac classiquement définies par :

$$\forall x, y \in X, \delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Considérons pour tout entier k , $\mu_k := \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \delta_{\Phi^i(x_k)}$ et $\tilde{\mu}_k := \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \delta_{\Phi^i(y_k)}$. Il s'agit de mesures de probabilités Φ -invariantes. Comme l'espace $\mathfrak{M}(\Phi)$ est compact (pour la topologie faible-*) on peut supposer (quitte à faire une nouvelle extraction) que les suites $(\mu_k)_k$ et $(\tilde{\mu}_k)_k$ convergent dans $\mathfrak{M}(\Phi)$ respectivement vers μ_∞ et $\tilde{\mu}_\infty$.

On a alors $\int_X f d\mu_\infty \leq a < b \leq \int_X f d\tilde{\mu}_\infty$ et donc $\mu_\infty \neq \tilde{\mu}_\infty$, ce qui contredit l'unicité d'une mesure de probabilité invariante pour Φ . □

L'hypothèse de convergence uniforme vers une fonction **constante** est essentielle, comme le montre le contre-exemple suivant :

Contre-exemple 23 (Suspension du cercle). Considérons sur le cercle \mathbb{S}^1 la rotation R_θ d'angle θ irrationnel. Comme nous le vérifierons bientôt (corollaire 28, il s'agit d'une application uniquement ergodique. Considérons maintenant $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ la suspension du cercle et l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \\ (x, t) & \longmapsto & (x + \theta, t) \end{cases}.$$

Soit maintenant $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et considérons f l'application continue sur la suspension définie par $f(x, t) = (g(x), t)$. Les sommes de Birkhoff de f en un point $(x, t) \in \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ convergent alors vers $c_g + t$ où c_g est la constante vers laquelle convergent uniformément les sommes de Birkhoff de g sur \mathbb{S}^1 . La valeur limite dépend donc de la « couche » (ou plutôt la feuille) de la suspension sur laquelle on se place, et la définition 1 d'unique ergodicité est donc mise en défaut.

Notons que les conditions de la définition 2 ne sont pas remplies non plus : pour tout $t \in [0, 1]$, on peut considérer la mesure μ_t définie par, pour tout sous ensemble $A \subset \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, $\mu_t(A) = Leb_{\mathbb{S}^1}(A \cap (\mathbb{S}^1 \times \{t\}))$ où $Leb_{\mathbb{S}^1}$ désigne la mesure de Lebesgue sur le cercle \mathbb{S}^1 . Toutes les mesures μ_t sont des mesures Φ -invariantes.

Remarque 24. Toutefois, on peut remplacer l'hypothèse de convergence vers une fonction constante par une hypothèse de minimalité (cela fera l'objet du théorème 27).

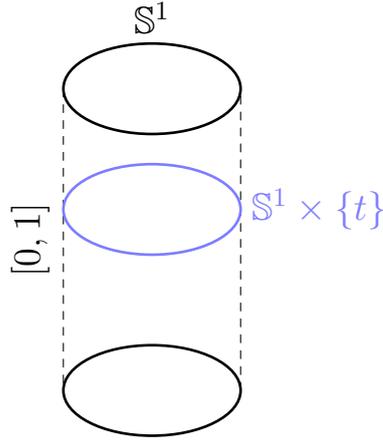


FIGURE 3 – Suspension du cercle \mathbb{S}^1 .

On arrive maintenant au premier théorème fondamental de la théorie ergodique. C'est un résultat très intuitif une fois qu'on a bien intégré ce qu'on a vu précédemment sur les différents points de vue de la notion d'unique ergodicité, contrairement à sa démonstration qui est élémentaire mais technique et qu'on retrouvera en annexe (voir A.3).

Théorème 25 (Théorème ergodique de Birkhoff). *Soient (X, μ, Φ) un système ergodique et une application $f \in L^1(X)$. Alors les moyennes de Birkhoff sont égales μ -presque partout à la moyenne spatiale de f :*

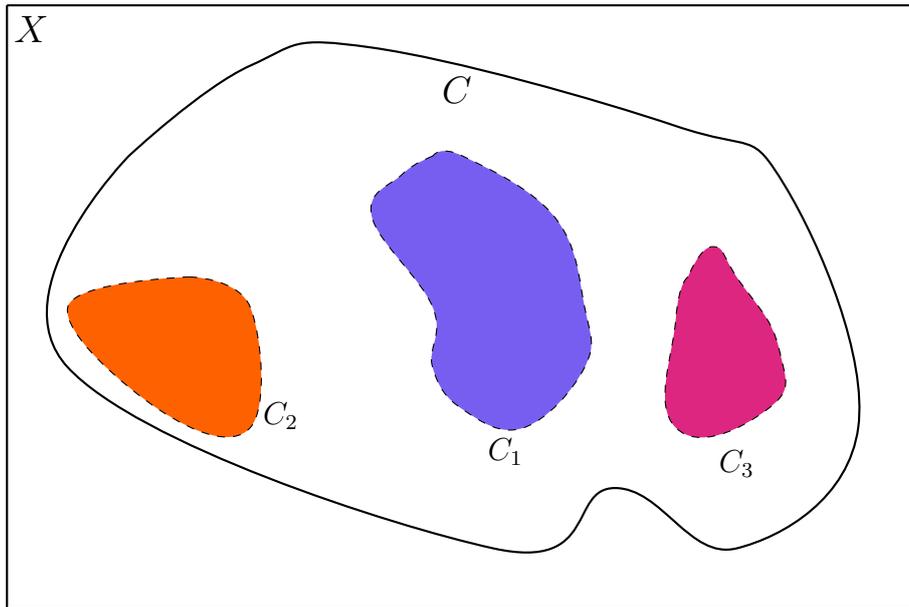
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n f(x) = \int_X f d\mu, \quad \mu - pp.$$

Remarque 26. Voici une façon d'interpréter ce théorème : Si pour f on choisit χ_A l'indicatrice d'un ensemble mesurable $A \subset X$, la quantité $\frac{1}{n} S_n \chi_A(x)$ désigne la proportion de temps passé dans l'ensemble A après n étapes en partant d'un point x . Le théorème ergodique de Birkhoff dit donc que, pour un système uniquement ergodique, peu importe l'ensemble (mesurable) A que l'on considère et peu importe le point de départ, la proportion de temps passé dans l'ensemble A tend vers la mesure de l'ensemble $\mu(A)$, c'est-à-dire la « proportion de A dans X » du point de vue de la mesure de probabilité μ .

Attention! Il faut bien noter que lorsqu'on dit que « pour une mesure ergodique μ , les moyennes de Birkhoff convergent μ -presque partout vers $\int_X f d\mu$ », cela dépend **vraiment** de la mesure que l'on se donne. En particulier, si on dispose de deux mesures ergodiques μ_1 et μ_2 , l'ensemble C_1 des points x pour lesquels $\frac{1}{n} S_n f(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_X f d\mu_1$ est de mesure pleine pour μ_1 , mais pas pour μ_2 ! C'est même un ensemble de mesure nulle pour μ_2 , puisque μ_2 charge pleinement C_2 . La situation est représentée dans la figure 4, dans le cas où on dispose de trois mesures ergodiques.

Notons d'ailleurs qu'il peut tout à fait exister des points pour lesquels les moyennes de Birkhoff convergent, mais pas vers la moyenne spatiale pour une mesure ergodique. C'est par exemple le cas dans la situation représentée dans la figure 5, où on considère un flot proche du bord d'un carré $ABCD$ qui soit extrêmement lent proche des coins (qui sont des points fixes du flot) et rapide ailleurs. Ce système admet quatre mesures ergodiques $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ et δ_D qui chargent chacune uniquement un sommet. Les moyennes de Birkhoff convergent vers la moyenne spatiale pour l'une de ces quatre mesures sur les bords du carré (par exemple vers la moyenne spatiale pour μ_B pour un point dans $]A, B[$), et vers une combinaison linéaire convexe des quatre moyennes spatiales pour un point à l'intérieur du carré.

X espace métrique compact, μ_1, μ_2, μ_3 trois mesures ergodiques distinctes.



$$C = \{x \in X \mid \frac{1}{n}S_n f(x) \text{ converge}\}$$

$$C_i = \{x \in X \mid \frac{1}{n}S_n f(x) \text{ converge vers } \int_X f d\mu_i\}$$

$$\forall i \neq j, \mu_i(C_i) = 1 \text{ et } \mu_i(C_j) = 0$$

FIGURE 4 – Différentes mesures ergodiques

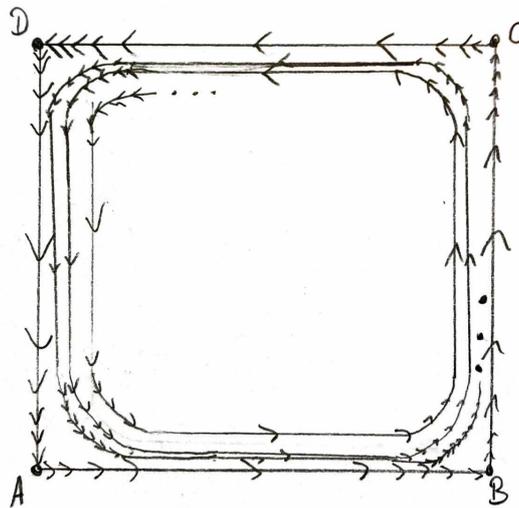


FIGURE 5 – Flot « presque carré », extrêmement lent proche des coins, rapide ailleurs.

Terminons cette section avec deux démonstrations (dont l'une se base sur le théorème ergodique de Birkhoff) d'un résultat que l'on utilisera pour conclure quant à l'unique ergodicité des premiers exemples de systèmes dynamiques que l'on avait considérés. Chaque démonstration utilise un point de vue différent sur l'unique ergodicité et illustre des raisonnements classiques en théorie ergodique.

Théorème 27. Soient (X, d) un espace métrique compact et $\Phi : X \rightarrow X$ une isométrie

telle que le système (X, Φ) soit topologiquement transitif, c'est-à-dire qu'il existe une orbite de l'action de Φ dense. Alors Φ est uniquement ergodique.

Première démonstration. Soit f une fonction continue sur X . Il s'agit de montrer que la suite de fonctions $(\frac{1}{n}S_n f)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur X vers une fonction constante. Commençons par montrer la convergence.

Tout d'abord, comme X est compact, f est uniformément continue. Comme Φ est une isométrie, l'ensemble $\mathcal{F} := \{f \circ \Phi^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est donc (uniformément) équicontinu et borné donc est relativement compact d'après le théorème d'Ascoli (voir l'annexe A.4 si besoin). On peut donc considérer une sous-suite d'indices $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $(\frac{1}{n_k}S_{n_k} f)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une fonction g . Montrons maintenant la convergence de toute la suite $(\frac{1}{n}S_n f)_{n \in \mathbb{N}}$ vers g .

On va utiliser le lemme sous/sur-additif (voir annexe A.5). Soit $(M_n)_{n \geq 1}$ la suite de terme général $M_n = \max_{x \in X} S_n f(x)$. Il s'agit bien d'une suite sous-additive :

$$\begin{aligned} M_{n+m} &= \max_{x \in X} \sum_{k=1}^{n+m} f \circ \Phi^k(x) \\ &= \max_{x \in X} \left(\sum_{k=1}^n f \circ \Phi^k(x) + \left(\sum_{k=1}^m f \circ \Phi^k \right) \circ \Phi^n(x) \right) \\ &\leq \max_{x \in X} \sum_{k=1}^n f \circ \Phi^k(x) + \max_{x \in X} \left(\sum_{k=1}^m f \circ \Phi^k \right) \circ \Phi^n(x) \\ &= M_n + M_m. \end{aligned}$$

D'après le lemme sous-additif (voir annexe A.5) on a donc

$$M_n/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M := \inf M_n/n.$$

On définit de même la suite de terme général $m_n := \min_{x \in X} S_n f(x)$ qui est sur-additive et qui vérifie donc

$$m_n/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m := \sup m_n/n.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ arbitraire. Pour k assez grand, on a $g - \varepsilon < \frac{1}{n_k}S_{n_k} f < g + \varepsilon$, d'où :

$$g - \varepsilon \leq m_{n_k}/n_k \leq m \leq M \leq M_{n_k}/n_k \leq g + \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0, on en déduit $m = M = g$, et donc $S_n f/n$ converge uniformément vers g .

Il ne nous reste plus qu'à montrer que g est constante. Remarquons tout d'abord qu'elle est invariante par Φ :

$$g \circ \Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f \circ \Phi + f \circ \Phi^2 + \dots + f \circ \Phi^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{S_n f}{n} + \underbrace{\frac{f \circ \Phi^n - f}{n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \right) = g.$$

Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, notons g_a l'ensemble $g^{-1}(\{a\})$. La fonction g est continue comme limite uniforme de fonctions continues, donc les g_a sont fermés.

Par ailleurs, ils sont invariants par Φ : Soit $x \in g_a$. Alors $g \circ \Phi(x) = g(x) = a$, donc $\Phi(x) \in g_a$, donc $\Phi(g_a) \subset g_a$. De même, si $\Phi(y) \in g_a$, alors $g(y) = g \circ \Phi(y) = a$. Donc $\Phi(g_a) = g_a$.

Les ensembles g_a sont donc ou bien vides, ou bien ils sont fermés et contiennent une orbite de Φ . En particulier pour un point $x \in X$ dont l'orbite est dense (un tel point existe toujours puisqu'on a supposé l'isométrie topologiquement transitive), si on note $b := g(x)$, alors la fonction continue g est constante égale à b sur une partie dense de X , donc elle est constante sur X . \square

Deuxième démonstration. L'idée de cette preuve peut être résumée ainsi : Comme les orbites sont denses, un point donné finit par se retrouver aussi proche qu'on le souhaite de n'importe quel autre point, et comme Φ est une isométrie, des points proches auront des trajectoires proches.

D'après le théorème 18 il existe au moins une mesure sur X ergodique pour Φ , et il s'agit maintenant de montrer qu'elle est unique. Considérons donc deux telles mesures μ_1 et μ_2 et montrons qu'elles sont égales.

Comme pour la première démonstration, considérons f une fonction continue et donc uniformément continue sur X un espace compact. Soit $\varepsilon > 0$ un réel strictement positif et, par uniforme continuité de f , $\delta > 0$ tel qu'on ait

$$\forall x_1, x_2 \in X, d(x_1, x_2) < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

D'après le théorème ergodique de Birkhoff (théorème 25), on peut considérer deux points $x, y \in X$ tels qu'on ait

$$\frac{1}{n} S_n f(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu_1, \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} S_n f(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu_2.$$

Notons que ces limites restent inchangées si on retranche un nombre fini de termes à ces sommes.

Soit x_0 un point sur une orbite dense de Φ (qui existe puisque Φ est supposée topologiquement transitive) et soit donc $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\Phi^{n_1}(x_0)$ soit dans la boule centrée en x et de rayon $\delta/2$. Toujours par densité de l'orbite, on peut trouver $n_2 \geq n_1$ tel que $d(\Phi^{n_2}(x_0), y) < \delta/2$, et comme Φ est une isométrie on a alors en particulier $d(\Phi^{n_1-n_2}(x), y) < \delta$. Notons $n_0 := n_2 - n_1$. À partir du temps n_0 , nos deux points sont proches et, comme Φ est une isométrie, ils vont le rester :

$$\forall k \geq 0, d(\Phi^{n_0+k}(x), \Phi^k(y)) = d(\Phi^{n_0}(x), y) < \delta.$$

Pour tout entier $n \geq n_0$, on a alors l'encadrement

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1-n_0} (f \circ \Phi^k(y) - \varepsilon) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1-n_0} (f \circ \Phi^k)(\Phi^{n_0}(x)) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1-n_0} (f \circ \Phi^k(y) + \varepsilon).$$

En passant à la limite en n avec la remarque précédente on obtient l'encadrement

$$\int_X f d\mu_2 - \varepsilon \leq \int_X f d\mu_1 \leq \int_X f d\mu_2 + \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient donc l'égalité $\int_X f d\mu_1 = \int_X f d\mu_2$, valable pour toute fonction continue f . D'après le théorème de représentation de Riesz-Markov (théorème 92), cela implique l'égalité entre les mesures μ_1 et μ_2 , et donc l'unique ergodicité du système. \square

Corollaire 28. *Le système dynamique sur le cercle associé à une rotation d'angle irrationnel, ou encore celui sur le tore \mathbb{T}^2 associé à un flot linéaire de pente irrationnelle sont uniquement ergodiques.*

Démonstration. Dans les deux cas il s'agit de systèmes minimaux sur un espace compact où l'action est isométrique, il suffit donc d'appliquer le théorème 27. \square

Remarque 29. En revanche, il est facile de voir que les rotations sur le cercle ne sont pas mélangeantes. Pour autant, le mélange n'est pas une propriété plus forte que l'unique ergodicité, et on verra dans la deuxième partie un exemple de systèmes dynamiques mélangeants mais pas uniquement ergodiques (les flots géodésiques sur des surfaces hyperboliques compactes).

Après cette longue (mais instructive!) digression, il est temps de revenir à notre premier objectif pour utiliser nos nouveaux outils.

1.7 Mélange (exponentiel) de la cat map

On souhaite donc démontrer l'affirmation suivante :

Théorème 30. *La cat map est mélangeante.*

On va fournir une preuve géométrique qui suit l'intuition développée à la section 1.4. L'idée est de se ramener au cas plus simple de carrés « bien orientés » pour lesquels il est facile de quantifier la proportion de l'un qui se retrouve dans l'autre après l'action de la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Rappelons que les valeurs propres de M sont $\lambda_1 := \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,4$ et $\lambda_2 := \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2,6$. Un vecteur propre de M pour la valeur propre λ_1 est $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}$. Comme M est symétrique et réelle, d'après le théorème spectral, les vecteurs propres pour λ_2 sont orthogonaux à v_1 . Il y a donc deux droites orthogonales que la cat map étire ou contracte. Cette remarque est le point de départ du lemme suivant :

Lemme 31. *Soient $A, B \subset \mathbb{T}^2$ deux carrés de côtés ε et δ respectivement, orientés selon les directions propres de Φ . On a alors*

$$\mu(\Phi^{-n}(A) \cap B) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu(A)\mu(B).$$

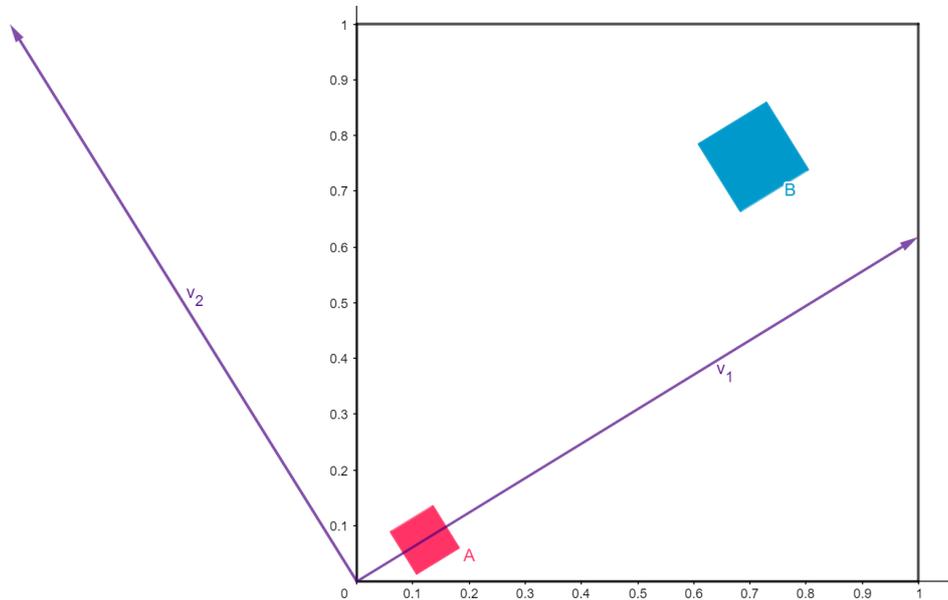


FIGURE 6 – Situation du lemme 31.

Démonstration. La situation est représentée dans la figure 6.

Tout d'abord, comme $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ est irrationnel, le flot linéaire φ_t de pente $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ sur \mathbb{T}^2 admet des orbites denses (proposition 4). En particulier, on peut considérer un point $x_0 \in A \cap (v_1)$,

et même le choisir sur le bord inférieur gauche du carré A . On note y_0 le point obtenu en translatant x_0 d'une longueur ε le long de la droite (v_1) , de sorte qu'il se trouve sur le côté opposé de A .

Comme A est orienté selon les directions propres de Φ , on sait que, pour tout entier n , $\Phi^n(A)$ est un rectangle de largeur $\lambda_1^n \varepsilon$ et de longueur $\lambda_2^n \varepsilon$.

Notons, pour tout n , $x_n := \Phi^n(x_0)$, $y_n := \Phi^n(y_0)$, $t_n \geq 0$ tel que $\varphi_{t_n}(x_0) = x_n$. On a alors $y_n = \varphi_{t_n + \lambda_2^n \varepsilon}(x_0)$. Notons également I_n l'intervalle $[x_n; y_n]$.

On cherche à évaluer $\mu(\Phi^n(A) \cap B) = \int_{\mathbb{T}^2} (\chi_A \circ \Phi^{-n}) \cdot \chi_B d\mu$. Une autre façon de voir l'ensemble $\Phi^n(A)$ est de le penser comme l'intervalle I_n épaissi d'une largeur $\lambda_1^n \varepsilon$ (pas forcément de manière symétrique), et alors l'ensemble $\mu(\Phi^n(A) \cap B)$ est presque l'ensemble $I_n \cap B$ épaissi (voir figure 7).

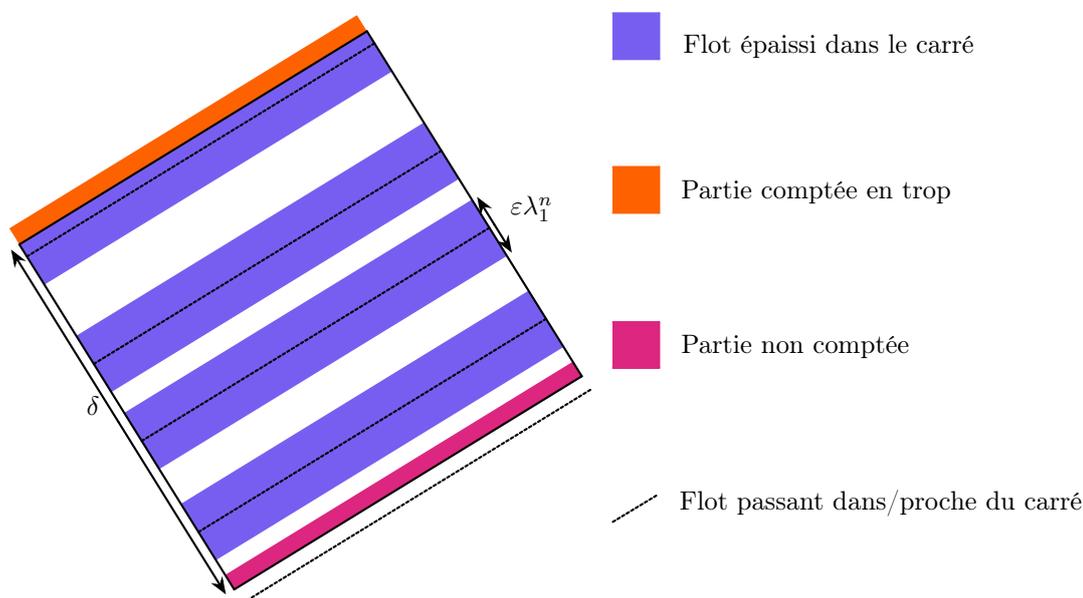


FIGURE 7 – Flot épaissi dans/proche d'un carré

Tout d'abord, les différentes composantes de la bande épaissie ne se chevauchent pas puisque ce sont les images de points distincts de A par Φ^n qui est un automorphisme. Aux bords du carré B , on peut ou bien compter des points « en trop » si on épaissit trop proche du bord, ou au contraire manquer des points dans B si la trajectoire du flot passe proche du carré mais à l'extérieur. Dans le cas où l'on compte trop de points, la pire erreur possible se produit quand la trajectoire passe exactement sur les bords de B , auquel cas on fait une erreur de $+2 \times \frac{1}{2} \times \lambda_1^n \varepsilon \delta = \lambda_1^n \varepsilon \delta$, et dans la situation inverse on manque deux demi-bandes et on fait une erreur de $-\lambda_1^n \varepsilon \delta$. On a donc

$$\mu(\Phi^{-n}(A) \cap B) \in \left[\lambda_1^n \varepsilon \int_0^{\lambda_2^n \varepsilon} \chi_B(\varphi_{-t}(x_n)) dt - \lambda_1^n \varepsilon \delta ; \lambda_1^n \varepsilon \int_0^{\lambda_2^n \varepsilon} \chi_B(\varphi_{-t}(x_n)) dt + \lambda_1^n \varepsilon \delta \right].$$

Comme $\lambda_1^n \varepsilon \delta$ tend vers 0, sous réserve d'existence de la deuxième limite, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Phi^{-n}(A) \cap B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^n \varepsilon \int_0^{\lambda_2^n \varepsilon} \chi_B(\varphi_{-t}(x_n)) dt.$$

Or, par unique ergodicité des feuilletages irrationnels sur \mathbb{T}^2 (corollaire 28), on a

$$\frac{1}{\lambda_2^n \varepsilon} \int_0^{\lambda_2^n \varepsilon} \chi_B(\varphi_{-t}(x_n)) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^2} \chi_B d\mu = \mu(B).$$

Ainsi,

$$\int_0^{\lambda_2^n \varepsilon} \chi_B(\varphi_{-t}(x_n)) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_2^n \varepsilon \int_{\mathbb{T}^2} \chi_B d\mu,$$

et donc

$$\lambda_1^n \varepsilon \int_0^{\lambda_2^n \varepsilon} \chi_B(\varphi_{-t}(x_n)) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underbrace{\lambda_1^n \lambda_2^n}_{=1} \underbrace{\varepsilon^2}_{=\mu(A)} \mu(B) = \mu(A)\mu(B).$$

□

On peut maintenant terminer la démonstration de la proposition 30 en approximant n'importe quels ensembles mesurables du tore par des carrés.

Démonstration. On doit donc montrer que pour tous ensembles mesurables $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^2)$, on a $\mu(\Phi^{-n}(A) \cap B) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu(A)\mu(B)$. Commençons par traiter le cas où A et B sont exactement des unions de carrés orientés selon les directions propres de la cat map.

Soient donc $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_l$ de tels carrés disjoints tels que l'on ait $A = \bigsqcup_{i=1}^k A_i$ et $B = \bigsqcup_{j=1}^l B_j$. Par propriété de la mesure, on a alors $\mu(A) = \sum_{i=1}^k \mu(A_i)$ et $\mu(B) = \sum_{j=1}^l \mu(B_j)$. En utilisant le fait que Φ préserve la mesure de Lebesgue (la matrice M est de déterminant $\det(M) = 1$) et le lemme 31 on obtient :

$$\mu(\Phi^{-n}(A) \cap B) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \mu(\Phi^{-n}(A_i) \cap B_j) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \mu(A_i)\mu(B_j) = \mu(A)\mu(B).$$

Concluons en supposant maintenant A et B seulement mesurables. Soit $\varepsilon > 0$ et A', B' deux ensembles réalisés comme unions de carrés orientés selon les directions propres de Φ , inclus respectivement dans A et B et tels que $\mu(A \setminus A') < \frac{\varepsilon}{4}$ et $\mu(B \setminus B') < \frac{\varepsilon}{4}$. En utilisant le fait que $A = (A \setminus A') \sqcup A'$ (et de même pour B et $\Phi^{-n}(A)$), on a successivement :

$$\begin{aligned} \mu(\Phi^{-n}(A) \cap B) &= \mu(\Phi^{-n}(A \setminus A') \cap B) + \mu(\Phi^{-n}(A') \cap B) \\ &= \underbrace{\mu(\Phi^{-n}(A \setminus A') \cap B)}_{< \varepsilon/4} + \underbrace{\mu(\Phi^{-n}(A') \cap (B \setminus B'))}_{< \varepsilon/4} + \mu(\Phi^{-n}(A') \cap (B')), \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \mu(A)\mu(B) &= \mu(A)\mu(B \setminus B') + \mu(A)\mu(B') \\ &= \mu(A) \underbrace{\mu(B \setminus B')}_{< \varepsilon/4} + \underbrace{\mu(A \setminus A')}_{< \varepsilon/4} \mu(B') + \mu(A')\mu(B'). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et en notant qu'en tant que sous ensembles de \mathbb{T}^2 , on a $\mu(A) \leq 1$ et $\mu(B') \leq 1$, on obtient finalement :

$$|\mu(\Phi^{-n}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)| \leq |\mu(\Phi^{-n}(A') \cap B') - \mu(A')\mu(B')| + \varepsilon.$$

Comme le ε est arbitraire on peut le faire tendre vers 0, ce qui conclut la démonstration. □

Contre-exemple 32 (Suspensions du tore). Avant de conclure en ce qui concerne la cat map, donnons un exemple important d'une famille de systèmes dynamiques qui ne sont jamais mélangeants.

En toute généralité, étant donné un espace topologique X et un homéomorphisme $f : X \rightarrow X$, la **suspension de X par f** est l'espace produit $X \times [0, 1]$ quotienté par la relation d'équivalence vérifiant, pour tout $x \in X$, $(x, 1) \sim (f(x), 0)$. Autrement dit, on recolle l'espace X sur lui-même selon l'action de l'homéomorphisme f . On note X_f cet espace.

Une telle suspension vient naturellement avec le **flot de suspension**, à savoir le flot associé au champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial t}$. Visuellement, suivre ce flot revient à se déplacer « verticalement » dans la suspension, en prolongeant l'orbite en repartant du point $(f(x), 0)$ lorsqu'on atteint le point $(x, 1)$. On a représenté une orbite sous l'action de ce flot à la figure 8.

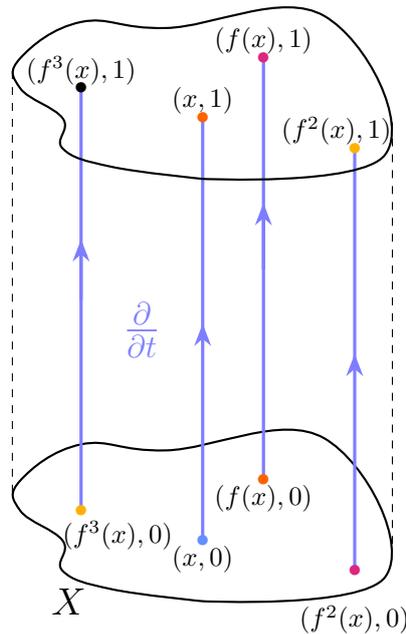


FIGURE 8 – Flot de suspension sur X_f , orbite du point $(x, 0)$

Par exemple, considérons un flot linéaire φ sur le tore de pente α irrationnelle comme à la proposition 4, et l'application « flot au temps 1 » définie par, pour tout $x \in \mathbb{T}^2$, $\varphi_1 : x \mapsto \varphi_1(x)$. On peut alors construire un flot de suspension en considérant $\mathbb{T}_{\varphi_1}^2$ la suspension du tore par φ_1 . Dans ce cas on a, pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour tout $(x, t) \in \mathbb{T}_{\varphi_1}^2$, $\varphi_s((x, t)) \in \mathbb{T}^2 \times \{t + s\}$, ce qui met en défaut toute forme de mélange.

On aurait aussi pu choisir de suspendre le tore par l'action de la cat map. Cet exemple sera détaillé dans la section 2.4 de la deuxième partie du mémoire, où il servira d'exemple pour montrer qu'un flot Anosov n'est pas toujours mélangeant.

Terminons cette première partie du mémoire en raffinant une dernière fois notre approche du mélange. Maintenant que l'on a bien cerné cette notion et qu'on a réussi à démontrer le caractère mélangeant de plusieurs systèmes, on cherche à estimer à quel point le mélange est rapide, c'est-à-dire à quelle vitesse la quantité $\mu(\Phi^{-n}(A) \cap B)$ se rapproche de $\mu(A)\mu(B)$.

On introduit à cet effet les **coefficients de corrélation** définis par, pour toutes fonctions f, g suffisamment régulières et n entier,

$$C_{f,g}(n) := \left| \int_{\mathbb{T}^2} f \times (g \circ \Phi^n) d\mu - \int_{\mathbb{T}^2} f d\mu \int_{\mathbb{T}^2} g d\mu \right|.$$

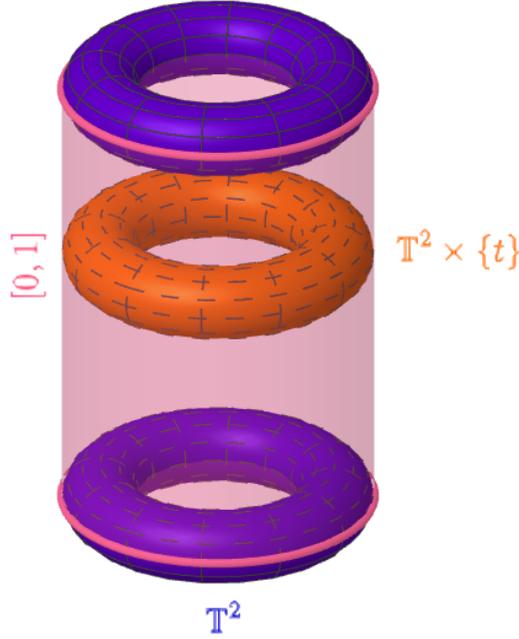


FIGURE 9 – Suspension du tore

Proposition 33. *La cat map est exponentiellement mélangante pour des observables suffisamment régulières. Concrètement, pour tout $\beta > 2$, $\alpha > \beta + 2$, et pour toutes fonctions $f \in C^\alpha(\mathbb{T}^2)$, $g \in C^\beta(\mathbb{T}^2)$, on a :*

$$C_{f,g}(k) = O((\lambda_2^\beta)^{-k}),$$

où $\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Remarque 34. La raison pour laquelle on demande une plus grande régularité à une des deux observables apparaîtra dans la démonstration. Notons que si f et g sont C^α avec α suffisamment grand, en particulier g sera $C^{\alpha-2}$ et on pourra alors conclure.

Démonstration. Soient $f \in C^\alpha(\mathbb{T}^2)$ et $g \in C^\beta(\mathbb{T}^2)$ de coefficients de Fourier respectifs $(a_{\vec{n}})_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2}$ et $(b_{\vec{n}})_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2}$.

Quitte à remplacer f par $f - \int_{\mathbb{T}^2} f d\mu$, on peut supposer $\int_X f d\mu = 0$, et donc $a_{(0,0)} = 0$, et de même $b_{(0,0)} = 0$. Rappelons que $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice associée à la cat map et que ses valeurs propres sont $\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \lambda_1^{-1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Un vecteur propre associé à λ_1 est $\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}$, et un vecteur propre associé à λ_2 est $\vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$.

On cherche à estimer les coefficients de corrélation, que l'on peut donc exprimer avec les séries de Fourier. Comme on a choisi f et g de moyennes spatiales nulles, on a pour tout entier k :

$$\begin{aligned} C_{f,g}(k) &= \left| \int_{\mathbb{T}^2} f(x) \times (g \circ \Phi^k)(x) d\mu(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{T}^2} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} a_{\vec{n}} e^{i\langle \vec{n}, x \rangle} \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} b_{\vec{m}} e^{i\langle \vec{m}, M^k x \rangle} d\mu(x) \right| \end{aligned}$$

En remarquant que M est symétrique et donc que pour tous vecteurs \vec{n}, x , on a $\langle \vec{n}, M^k x \rangle = \langle -M^k \vec{n}, x \rangle$ (c'est un produit hermitien), puis en utilisant l'orthonormalité de la famille

$(e^{i\langle \vec{n}, \cdot \rangle})_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} C_{f,g}(k) &= \left| \int_{\mathbb{T}^2} \sum_{\vec{n}, \vec{m} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} a_{\vec{n}} b_{-M^k \vec{m}} e^{i\langle \vec{n} + M^k \vec{m}, x \rangle} d\mu(x) \right| \\ &\leq \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} |a_{\vec{n}}| |b_{M^{-k} \vec{n}}| \end{aligned}$$

Pour $R > 0$, notons $\square_R := B_\infty(R) \cap \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, c'est à dire les points entiers non nuls dans le carré de côtés R centré en $(0, 0)$.

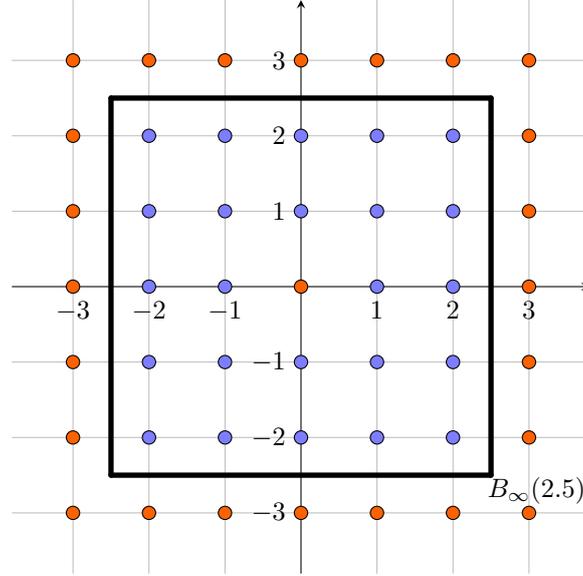


FIGURE 10 – Les éléments de $\square_{2.5}$ sont représentés en bleu.

On a alors

$$C_{f,g}(k) \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{\vec{n} \in \square_R \setminus \{0\}} |a_{\vec{n}}| |b_{-M^{-k} \vec{n}}|.$$

On pourra donc conclure si on parvient à montrer qu'il existe une constante C indépendante de k (assez grand) telle que pour tout $R > 0$ on ait

$$\sum_{\vec{n} \in \square_R \setminus \{0\}} |a_{\vec{n}}| |b_{-M^{-k} \vec{n}}| \leq C(\lambda^\beta)^{-k}.$$

Pour $\vec{n} \in \mathbb{Z}^2$ fixé, puisque les vecteurs v_1 et v_2 sont orthogonaux, on a

$$\vec{n} = \frac{\langle \vec{n}, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle \vec{n}, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2.$$

Notons que, v_1 et v_2 ayant chacun une coordonnée irrationnelle différente de l'autre et \vec{n} étant à coordonnées entières, les produits scalaires $\langle \vec{n}, v_1 \rangle$ et $\langle \vec{n}, v_2 \rangle$ sont nécessairement non nuls dès que $\vec{n} \neq 0$. En notant $c_{1,\vec{n}} := \frac{\langle \vec{n}, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}$ et $c_{2,\vec{n}} := \frac{\langle \vec{n}, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2}$, on a alors :

$$\begin{aligned} M^{-k} \vec{n} &= M^{-k}(c_{1,\vec{n}} v_1 + c_{2,\vec{n}} v_2) \\ &= \lambda_1^{-k} c_{1,\vec{n}} v_1 + \lambda_2^{-k} c_{2,\vec{n}} v_2 \\ &= \lambda_2^k c_{1,\vec{n}} v_1 + \lambda_2^{-k} c_{2,\vec{n}} v_2. \end{aligned}$$

Quand k devient grand, la quantité $\lambda_2^k c_{2,\vec{n}}$ tend vers 0, donc pour estimer la norme de $M^{-k}\vec{n}$ on doit se concentrer sur la quantité $c_{1,\vec{n}}$, c'est-à-dire sur $\langle \vec{n}, v_1 \rangle$.

Pour $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$, on souhaite minimiser $|\langle \vec{n}, v_1 \rangle| = |n_1 \frac{1-\sqrt{5}}{2} + n_2|$. Le réel $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ est racine du polynôme $P(X) = X^2 - X - 1$ qui est irréductible sur \mathbb{Q} , donc d'après le lemme de Liouville (lemme 99 en annexe), on a l'existence d'une constante $K \in \mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\left| n_1 \frac{1-\sqrt{5}}{2} + n_2 \right| \geq \frac{K}{|n_1|^{2-1}} = \frac{K}{|n_1|} \geq \frac{K}{\|\vec{n}\|}.$$

On en déduit donc, pour k assez grand (c'est-à-dire ici tel que $c_{2,\vec{n}}\lambda_2^{-k} < \frac{1}{2}c_{1,\vec{n}}\lambda_2^k$) :

$$\|M^{-k}\vec{n}\| \geq \frac{K}{2\|v_1\|^2} \frac{\lambda_2^k}{\|\vec{n}\|} \|v_1\| = \frac{K}{2\|v_1\|} \frac{\lambda_2^k}{\|\vec{n}\|}.$$

Comme $f, g \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T}^2)$, leur coefficients de Fourier décroissent en $1/\|\vec{n}\|^\alpha$. On en déduit donc l'existence de constantes K_a, K_b telles que, pour tout \vec{n} de norme suffisamment grande :

$$|a_{\vec{n}}| \leq \frac{K_a}{\|\vec{n}\|^\alpha}, \quad \text{et} \quad |b_{M^{-k}\vec{n}}| \leq K_b \frac{(\lambda_2^\alpha)^k}{\|\vec{n}\|^\beta}.$$

On en déduit l'existence d'une constante κ (dans laquelle on fait éventuellement rentrer un nombre fini de termes indexés par des vecteurs \vec{n} de petite norme) telle que, pour tout k assez grand :

$$\sum_{\vec{n} \in \square_R} |a_{\vec{n}}| |b_{M^{-k}\vec{n}}| \leq (\lambda_2^\beta)^{-k} \kappa \sum_{\vec{n} \in \square_R} \frac{1}{\|\vec{n}\|^{\alpha-\beta}}.$$

Comme on a supposé $\alpha > \beta - 2$, la série $\sum_{\vec{n}} \frac{1}{\|\vec{n}\|^{\alpha-\beta}}$ converge sur $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, et on peut donc faire tendre R vers $+\infty$ dans le terme de droite pour obtenir

$$\sum_{\vec{n} \in \square_R} |a_{\vec{n}}| |b_{M^{-k}\vec{n}}| \leq C (\lambda_2^\beta)^{-k},$$

où on a posé $C := \kappa \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{\|\vec{n}\|^{\alpha-\beta}}$. Cette constante ne dépend pas de R , donc on a finalement

$$C_{f,g}(k) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} |a_{\vec{n}}| |b_{M^{-k}\vec{n}}| \leq C (\lambda_2^\beta)^{-k},$$

ce qui termine cette démonstration. \square

Remarque 35. Soulignons qu'on a ici donné une nouvelle démonstration du caractère mélangeant de la cat map puisque le mélange exponentiel est un raffinement du mélange. Si on avait simplement voulu montrer le mélange, on aurait pu alléger la preuve en montrant simplement que les coefficients de corrélation tendaient vers 0 sans estimer la vitesse de convergence.

2 Flot géodésique sur une surface hyperbolique

Après avoir fait connaissance avec différentes notions de théorie ergodique par le biais de notre modèle-jouet, on s'attaque maintenant à l'étude des systèmes qui ont historiquement lancé le champ de la dynamique hyperbolique : le flot géodésique sur des surfaces hyperboliques. Comme pour la section précédente, le résultat en ligne de mire est un théorème de mélange, le théorème 91. Plutôt que de courir en ligne droite (certains diraient « suivre une géodésique ») vers la preuve du résultat, on choisit de se balader le long d'un chemin de randonnée afin d'avoir le temps d'apprécier le paysage pour prendre du recul sur les phénomènes qu'on y croquera.

Avant toute chose, on rappelle (sans démonstrations) les résultats élémentaires sur la géométrie de \mathbb{H}^2 .

2.1 Rappels succincts sur la géométrie de \mathbb{H}^2

En cas de besoin, on trouvera la majorité des démonstrations des résultats énoncés ici dans le petit livre très clair [Kat92] de Svetlana Katok.

Définition 36. On appellera **demi-plan hyperbolique** et on notera \mathbb{H}^2 le demi-plan supérieur $\mathcal{H} := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ muni de la métrique $ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$.

Ce même espace se réalise aussi dans le modèle du **disque de Poincaré**, image du demi-plan supérieur par l'application de Cayley :

$$C : \begin{cases} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ z & \longmapsto & \frac{z-i}{z+i} \end{cases}$$

Proposition 37. Dans le modèle du demi-plan, les géodésiques de \mathbb{H}^2 sont les droites verticales et les demi-cercles centrés sur la droite réelle.

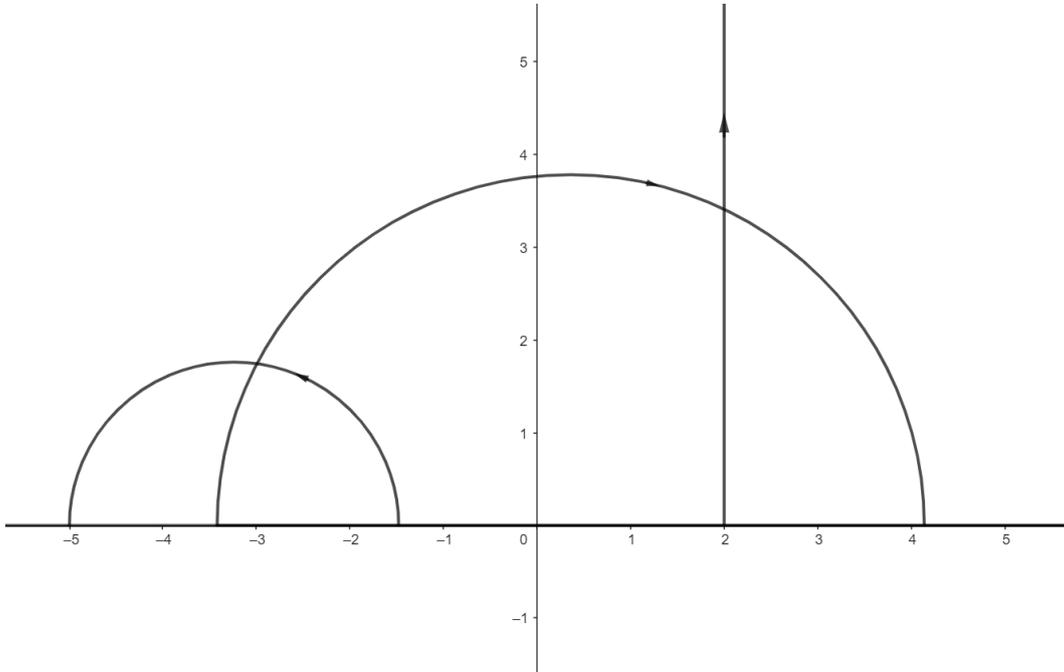


FIGURE 11 – Quelques géodésiques dans le modèle du demi-plan.

Dans le modèle du disque, les géodésiques de \mathbb{H}^2 sont les diamètres du disque et les arcs de cercles intersectant le bord du disque en formant des angles droits.

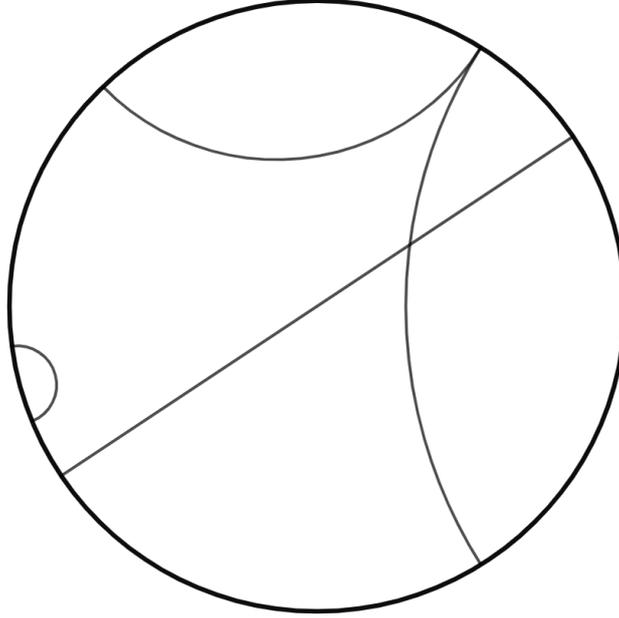


FIGURE 12 – Quelques géodésiques dans le modèle du disque.

Remarque 38. Cela permet de montrer géométriquement qu'étant donnés deux points de \mathbb{H}^2 , il existe une unique géodésique reliant ces deux points. On peut aussi le voir comme une conséquence du théorème de Hopf-Rinow.

Proposition 39. Le groupe $PSL_2(\mathbb{R}) := SL_2(\mathbb{R})/\{\pm I_2\}$ agit par transformations de Möbius (on dit aussi par homographies) sur \mathbb{H}^2 , c'est-à-dire que pour tout élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{R})$ et pour tout $z \in \mathbb{H}^2$, on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Le groupe $PSL_2(\mathbb{R})$ se réalise alors comme le groupe des isométries directes de \mathbb{H}^2 (pour la distance hyperbolique induite par la métrique ds).

Remarque 40. L'action s'étend au bord : Dans le modèle du demi plan, on prolonge l'action de tout élément $\gamma := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ en posant $\gamma \cdot (-d/c) = \infty$ et $\gamma \cdot \infty = a/c$ (ou $\gamma \cdot \infty = \infty$ si $c = 0$). L'action sur les autres réels consiste simplement à appliquer la transformation de Möbius associée à γ .

On note $\partial\mathbb{H}^2$ le bord de l'espace hyperbolique. Il s'identifie à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dans le modèle du demi-plan, et au bord du disque dans le modèle de Poincaré.

Proposition 41. L'action de $PSL_2(\mathbb{R})$ sur $\partial\mathbb{H}^2$ est 3-transitive :

$$\forall x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1 \text{ et } y_1 \neq y_2 \neq y_3 \neq y_1 \in \partial\mathbb{H}^2, \exists \gamma \in PSL_2(\mathbb{R}), \forall i \in \{1, 2, 3\}, \gamma \cdot x_i = y_i.$$

Proposition 42. Les éléments de $PSL_2(\mathbb{R})$ non triviaux se décomposent en trois familles :

- les éléments **elliptiques**, qui sont les analogues des rotations dans le plan euclidien et qui possèdent un unique point fixe à l'intérieur du disque,
- les éléments **paraboliques**, qui admettent un unique point fixe au bord,
- et les éléments **hyperboliques**, qui admettent deux points fixes sur le bord et qui stabilisent donc la géodésique les reliant.

Définition 43 (Axe d'un élément). La géodésique dans \mathbb{H}^2 reliant le point fixe répulsif au point fixe attractif d'un élément hyperbolique $\gamma \in PSL_2(\mathbb{R})$ est appelée l'**axe de γ** .

Définition 44. Un **groupe fuchsien** est un sous-groupe discret de $PSL_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire un sous-groupe discret de $Isom^+(\mathbb{H}^2)$. Un tel groupe sera dit **cocompact** si le quotient $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ est compact.

Proposition 45. L'action de $PSL_2(\mathbb{R})$ sur \mathbb{H}^2 envoie les géodésiques sur des géodésiques.

Proposition 46. Dans le modèle du demi-plan, la géodésique verticale passant par i se paramétrise par longueur d'arc via $t \mapsto ie^t$.

On obtient des paramétrisations par longueur d'arc des autres géodésiques en translatant celle-ci via l'action de $PSL_2(\mathbb{R})$.

Inversement, par 3-transitivité de l'action sur le bord, en ramenant l'étude de deux géodésiques avec même extrémité future au cas de deux géodésiques verticales dans le modèle du demi-plan, on démontre :

Proposition 47. Deux géodésiques α, β se rapprochent dans le futur si et seulement si elles ont même extrémité dans le futur :

$$(\exists f, g \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ croissantes, } d_{\mathbb{H}^2}(\alpha(f(t)), \beta(g(t))) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0) \Leftrightarrow \alpha(\infty) = \beta(\infty).$$

De plus, pour deux telles géodésiques paramétrées par longueur d'arc, des points situés « au même endroit » sur les géodésiques se rapprochent exponentiellement rapidement :

Proposition 48. Soient α, β deux géodésiques verticales, d'extrémité future ∞ , paramétrées par longueur d'arc. Alors si on considère que $\alpha(0)$ et $\beta(0)$ sont de même ordonnée dans le modèle du demi-plan, on a :

$$d_{\mathbb{H}^2}(\alpha(t), \beta(t)) = o(e^{-t}) \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

Remarque 49. En considérant les mêmes géodésiques parcourues en sens inverses, on obtient exactement la même caractérisation en $-\infty$.

Remarque 50. Comme les éléments de $PSL_2(\mathbb{R})$ envoient les géodésiques sur des géodésiques et que celles-ci sont uniquement déterminées par leurs extrémités, l'action d'un élément hyperbolique préserve son axe.

Définition 51 (Domaine de Dirichlet). Soit Γ un sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{H}^2$ un point qui ne soit le point fixe d'aucun élément parabolique de Γ (on peut démontrer qu'un tel point existe toujours). Le **domaine de Dirichlet** de Γ centré en p est l'ensemble

$$D_p(\Gamma) := \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \forall \gamma \in \Gamma, d_{\mathbb{H}^2}(p, z) \leq d_{\mathbb{H}^2}(p, \gamma \cdot z)\}.$$

Pour un tel point p fixé, l'ensemble des $D_{\gamma \cdot p}(\Gamma)$ pour $\gamma \in \Gamma$ pave l'espace \mathbb{H}^2 .

Théorème 52. Toute surface orientable de genre $g \geq 2$ (compacte ou non) se réalise comme quotient $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ où Γ est un groupe fuchsien sans points fixes.

Dans toute la suite Γ désignera un groupe fuchsien cocompact sans points fixes. On notera S la surface compacte $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ ainsi obtenue.

Le personnage principal de ce texte est le **flot géodésique**. Grossièrement, étudier cet objet revient à regarder les trajectoires de points le long de géodésiques. Pour en donner une définition correcte, on a d'abord besoin d'introduire le fibré unitaire tangent :

Définition 53 (Fibré unitaire tangent). Rappelons que le **fibré tangent** d'une variété différentielle M , noté TM , est la somme disjointe des espaces tangents en tous les points de la variété, c'est-à-dire :

$$TM := \{(x, v) \in (M \times T_x M)\}.$$

On appelle **fibré unitaire tangent** de M , et on note T^1M l'ensemble des vecteurs de norme 1 de TM , c'est-à-dire l'ensemble

$$T^1M := \{(x, v) \in (M \times T_x M) \mid \|v\| = 1\}.$$

En particulier, le fibré unitaire tangent d'une variété est un fibré en cercles : T^1M est localement isomorphe à l'espace produit $M \times \mathbb{S}^1$.

Remarque 54. Il faut bien noter que la condition sur la norme du vecteur dans l'espace tangeant fait référence à une norme précise sur la variété M . Ainsi, si M est une variété riemannienne, c'est à la norme induite par la métrique riemannienne qu'on fait référence, et la formule dépend alors du point au dessus duquel on considère l'espace tangent.

Par exemple, dans le modèle du demi-plan de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^2 (dont on a donné la métrique à la définition 36), pour un point $z \in \mathcal{H}$, la norme d'un vecteur ζ de l'espace tangeant en z est donnée par

$$\|\zeta\| = \frac{|\zeta|^2}{\text{Im}(z)^2},$$

où $|\zeta|$ désigne simplement le module de ζ en tant que nombre complexe.

Définition 55. Pour (x, v) un point du fibré unitaire tangeant T^1M , notons $g_{(x,v)} : \mathbb{R} \rightarrow M$ l'unique géodésique paramétrée par longueur d'arc vérifiant $g(0) = x$ et $g'(0) = v$.

Le **flot géodésique**, noté g_t , est alors le flot défini sur T^1M par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g_t : \begin{cases} T^1M & \longrightarrow & T^1M \\ (x, v) & \longmapsto & (g_{(x,v)}(t), g'_{(x,v)}(t)) \end{cases} .$$

Théorème 56. *Il existe un homéomorphisme entre le groupe $PSL_2(\mathbb{R})$ et le fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}^2$ tel que l'action de $PSL_2(\mathbb{R})$ sur lui-même par multiplication à gauche se traduise comme l'action de $PSL_2(\mathbb{R})$ sur $T^1\mathbb{H}^2$ induite par l'action de $PSL_2(\mathbb{R})$ sur \mathbb{H}^2 par transformations de Möbius.*

Voici comment cette action se réalise concrètement : Pour un élément $\gamma := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{R})$, notons Möb_γ l'application réalisant l'action par transformation de Möbius de γ sur le demi-plan \mathcal{H} , c'est-à-dire :

$$\text{Möb}_\gamma : \begin{cases} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ z & \longmapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{cases}$$

Pour tout $z \in \mathcal{H}$ et pour tout ζ appartenant à $\text{Im}(z) \times \mathbb{S}^1$ la sphère de rayon $\text{Im}(z)$ (de sorte à ce que ζ soit unitaire dans l'espace tangent, voir la remarque 54), on a alors :

$$D_z \text{Möb}_\gamma(\zeta) = \frac{1}{(cz+d)^2} \zeta.$$

L'action d'un élément γ de $PSL_2(\mathbb{R})$ sur un élément (z, ζ) de $T^1\mathbb{H}^2$ est alors donnée par :

$$\gamma \cdot (z, \zeta) = (\text{Möb}_\gamma(z), D_z \text{Möb}_\gamma(\zeta)).$$

Remarque 57. En particulier, l'action de $PSL_2(\mathbb{R})$ sur $T^1\mathbb{H}^2$ est donc simplement transitive :

$$\forall v, w \in T^1\mathbb{H}^2, \exists! \gamma \in PSL_2(\mathbb{R}), \gamma \cdot v = w.$$

Cette remarque nous permet de donner explicitement un isomorphisme entre $T^1\mathbb{H}^2$ et $PSL_2(\mathbb{R})$: on fixe l'élément $v_0 := (i, i)$ dans $T^1\mathbb{H}^2$ (c'est-à-dire le vecteur vertical vers le haut de norme 1 dans l'espace tangent au dessus du point i dans \mathbb{H}^2) et on définit l'application

$$\psi : T^1\mathbb{H}^2 \rightarrow PSL_2(\mathbb{R})$$

de telle sorte que, pour tout élément $v \in T^1\mathbb{H}^2$, $\psi(v)$ soit l'unique élément de $PSL_2(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\psi(v) \cdot v_0 = v.$$

On se servira de l'isomorphisme ψ à la partie 2.6 pour donner un formalisme algébrique au flot géodésique sur \mathbb{H}^2 .

2.2 Ping-pong et flot géodésique sur une surface compacte

Dans cette partie, on montre avec des arguments de théorie géométrique des groupes des propriétés relatives aux orbites du flot géodésique sur une surface hyperbolique compacte. On verra plus tard que les propriétés démontrées ici sont en fait caractéristiques d'une classe plus large de systèmes dynamiques : les systèmes Anosov.

Théorème 58. *L'ensemble des orbites périodiques du flot géodésique sur T^1S est dense dans T^1S .*

Démonstration. Plaçons nous dans le modèle du disque de Poincaré et considérons un élément $v \in T^1S$, un domaine de Dirichlet $D \subset \mathbb{D}$ associé à S et notons $w \in T^1\mathbb{D}$ le relevé de v dont le point-base se trouve dans D . Notons enfin c la géodésique dans \mathbb{D} induite par w , c'est-à-dire vérifiant $\dot{c}(0) = w$, et $c_{-\infty}$ et c_{∞} les extrémités passées et futures de c sur le bord du disque $\partial\mathbb{D}$.

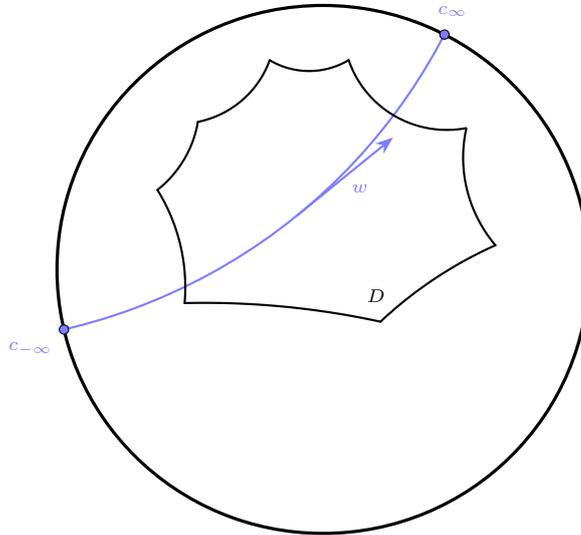


FIGURE 13 – Géodésique traversant un domaine de Dirichlet

On souhaite trouver un point de $T^1\mathbb{D}$ situé sur le relevé d'une orbite périodique pour le flot géodésique sur S , de point-base proche de celui de w (donc en particulier dans D) et de direction proche de celle de w . Si on montre qu'on peut trouver un tel point arbitrairement proche de w selon les deux coordonnées, on aura démontré le théorème.

Commençons par caractériser les orbites périodiques du flot géodésique sur S : il s'agit exactement des géodésiques fermées de S , qui se relèvent donc en certaines géodésiques de \mathbb{D} , à savoir les géodésiques \tilde{c} pour lesquelles il existe un temps $t \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout

$x \in \tilde{c}$, x et $\tilde{c}_t(x)$ sont égaux après projection sur S (on peut interpréter le temps t comme la longueur de la géodésique sur S). Autrement dit, les orbites périodiques du flot géodésique sur S sont exactement les projections sur S des axes des éléments de Γ dans \mathbb{D} .

Remarquons maintenant que deux géodésiques dont les extrémités sont proches restent « proches » durant tout leur parcours, au sens où pour deux telles géodésiques c^1, c^2 et pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, les points $(c^1(t), \dot{c}^1(t))$ et $(c^2(t), \dot{c}^2(t))$ sont proches dans le fibré unitaire tangent, comme l'illustre la figure 14.

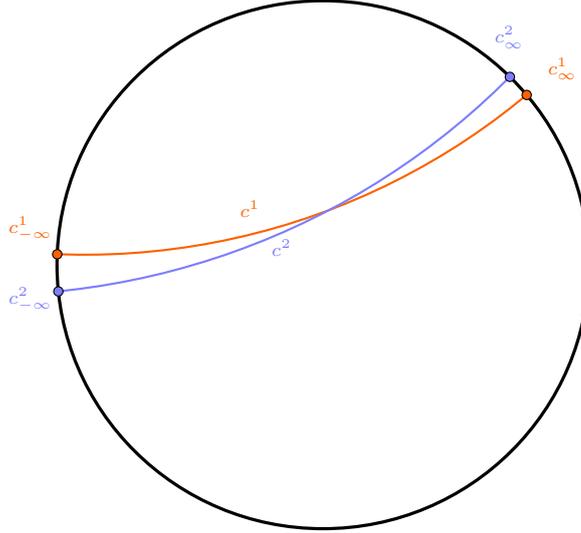


FIGURE 14 – Deux géodésiques dont les extrémités sont proches restent proches

On fixe donc un $\delta > 0$ arbitraire et on cherche un élément $\gamma \in \Gamma$ dont les extrémités de l'axe soient dans des voisinages U, V de diamètre δ de $c_{-\infty}$ et de c_{∞} . Cet axe correspondra donc à une orbite périodique sur S , et on y trouvera un élément proche de v comme voulu.

Commençons par justifier le lemme suivant :

Lemme 59. *Le bord du disque $\partial\mathbb{D}$ n'admet pas de sous-espace strict fermé non-vide stable par l'action de Γ .*

Démonstration. Soit $F \subset \partial\mathbb{D}$ un sous-ensemble fermé non vide et stable par l'action de Γ . Montrons que $F = \partial\mathbb{D}$.

L'enveloppe convexe (au sens hyperbolique, voir figure 15) de F est alors également stable par l'action de Γ ; on la note $\text{Conv}(F)$. Considérons alors la fonction distance à l'ensemble $\text{Conv}(F)$, notée $d_{\text{Conv}(F)}$. Comme le groupe Γ agit par isométries sur \mathbb{D} , la fonction $d_{\text{Conv}(F)}$ est invariante par l'action de Γ :

$$\forall x \in \mathbb{D}, \forall \gamma \in \Gamma, \quad d_{\text{Conv}(F)}(x) = d_{\gamma \cdot \text{Conv}(F)}(\gamma \cdot x) = d_{\text{Conv}(F)}(\gamma \cdot x).$$

La fonction $d_{\text{Conv}(F)}$ passe ainsi au quotient sur S . Comme S est compacte, $d_{\text{Conv}(F)}$ est bornée et cela implique qu'elle est en fait nulle : si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver un point en dehors de $\text{Conv}(F)$ et lui faire suivre une géodésique s'éloignant de $\text{Conv}(F)$ à l'infini et ainsi faire exploser les valeurs prises par $d_{\text{Conv}(F)}$. L'enveloppe convexe de F est donc égale au disque tout entier, et comme F est fermé cela implique $F = \partial\mathbb{D}$.

□

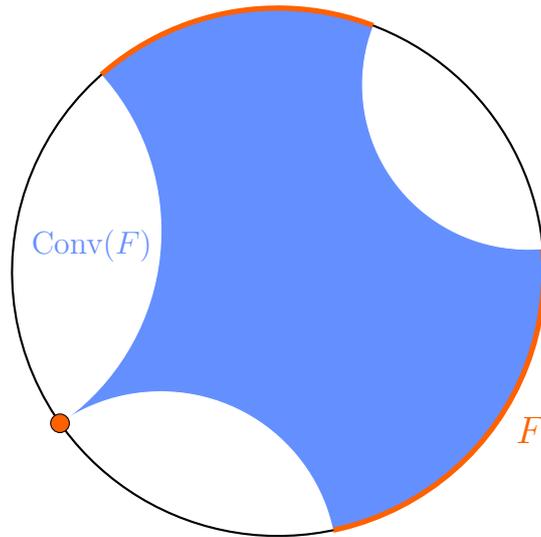


FIGURE 15 – Enveloppe convexe (hyperbolique) d'une partie fermée du bord du disque

Remarquons maintenant que l'adhérence de l'ensemble des extrémités des axes des éléments de Γ est un sous-ensemble fermé (non vide) et Γ -invariant de $\partial\mathbb{D}$. Le lemme précédent nous dit donc que l'ensemble des extrémités des axes des éléments de Γ est dense dans $\partial\mathbb{D}$. On peut donc considérer deux éléments $\gamma, \eta \in \Gamma$ tels que $\gamma_\infty \in V$ et $\eta_{-\infty} \in U$. Si $\gamma = \eta$ on a gagné, sinon on fait du ping-pong! Il s'agit d'un argument classique de théorie géométrique des groupes, voyons comment il se présente ici :

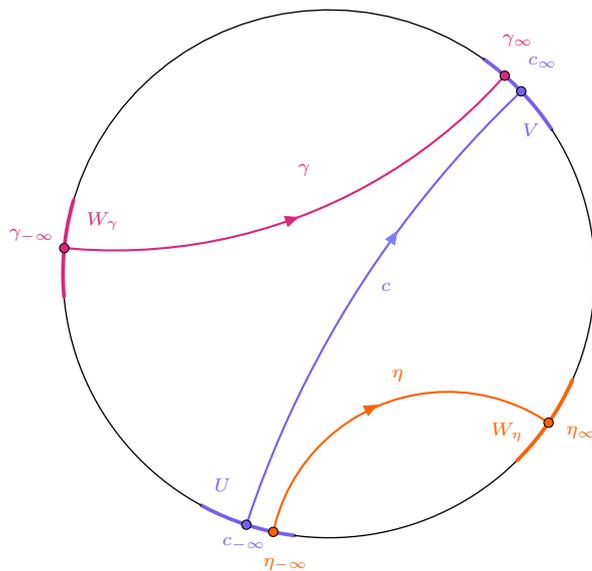


FIGURE 16 – Ping-pong au bord du disque

Supposons que les quatre extrémités $\gamma_\infty, \gamma_{-\infty}, \eta_\infty$ et $\eta_{-\infty}$ soient distinctes et construisons

alors un élément de Γ d'extrémités dans U et V à partir de γ et η . Les extrémités de l'axe d'un élément sont des points attractifs ou répulsifs pour la dynamique induite par l'action de l'élément sur le bord, autrement dit, pour tout voisinage W_{γ_∞} de γ_∞ sur le bord et pour tout secteur $I \subset \partial\mathbb{D} \setminus \{\gamma_{-\infty}\}$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma^n(I) \subset W_{\gamma_\infty}$, et on a des caractérisations similaires pour γ^{-1} et $\eta^{\pm 1}$.

En particulier, pour des voisinages comme sur la figure 16, on peut considérer un entier n suffisamment grand pour avoir simultanément $\eta^n(V) \subset W_\eta$ et $\gamma^n(\partial\mathbb{D} \setminus W_\gamma) \subset V$, de sorte à avoir $\gamma^n \eta^n(V) \subset V$. L'élément $\gamma^n \eta^n$ admet donc un point fixe attractif dans V . En effectuant un ping-pong similaire, on peut aussi considérer un entier m suffisamment grand pour que $\eta^{-m} \gamma^{-m}$ admette un point fixe attractif dans U . Finalement, l'élément $\gamma^{\max(n,m)} \eta^{\max(n,m)} \in \Gamma$ admet des extrémités dans U et V , et c'est ce qu'on cherchait à obtenir. \square

Théorème 60. *Le flot géodésique sur T^1S est topologiquement transitif.*

Démonstration. Tout d'abord, rappelons que le fibré unitaire tangent d'une variété compacte M est compact. On peut le voir de plusieurs façons, par exemple avec une caractérisation séquentielle (cependant il faut bien se garder de croire qu'il existerait un isomorphisme entre T^1M et $M \times \mathbb{S}^1$, cela n'est vrai que localement!).

Rappelons alors que, en vertu du lemme 6, la surface S étant compacte, ce qui implique donc que son fibré unitaire tangent T^1S l'est aussi, le flot géodésique g sera topologiquement transitif sur T^1S si et seulement si pour n'importe quels ouverts $U, V \subset T^1S$, il existe un temps $t \in \mathbb{R}$ tel qu'on ait $g_t(U) \cap V \neq \emptyset$. La densité des orbites périodiques nous permet de réduire encore les hypothèses à vérifier : il nous suffit de montrer que pour tous points $u, v \in T^1S$ engendrant une orbite périodique, et pour tous voisinages U, V de u et v , il existe un réel $t \in \mathbb{R}$ tel que $g_t(U) \cap V \neq \emptyset$.

En se plaçant dans le disque \mathbb{D} , cela revient à trouver une géodésique c sur \mathbb{D} et deux temps t_1, t_2 tels que $(c(t_1), \dot{c}(t_1)) \in U$ et $(c(t_2), \dot{c}(t_2)) \in V$ (on identifie ici U et V à l'ensemble de leurs relevés dans $T^1\mathbb{H}^2$). En effet, on aura alors $g_{t_2-t_1}(c(t_1), \dot{c}(t_1)) = (c(t_2), \dot{c}(t_2))$, et donc en particulier $g_{t_2-t_1}(U) \cap V \neq \emptyset$. Pour ce faire, on considère la géodésique c représentée dans la figure 17, c'est-à-dire la géodésique reliant $c_u^{-\infty}$ (dans le passé) à c_v^∞ (dans le futur).

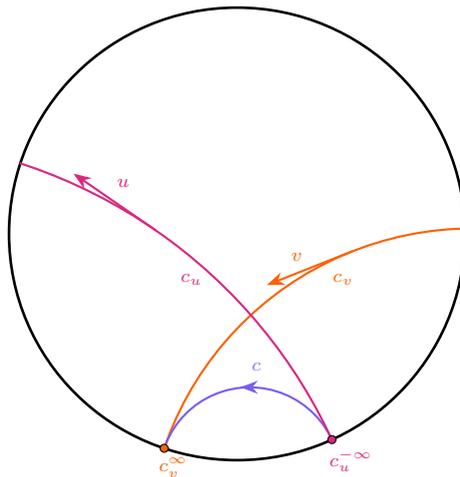


FIGURE 17 – Preuve du théorème 60

Quitte à reparamétriser la vitesse de parcours de c_u et c_v , on peut alors supposer que c se rapproche exponentiellement vite de c_v dans le passé, et exponentiellement vite de c_u dans le futur, ce qui implique bien l'existence de temps t_1 et t_2 comme on les cherchait. \square

2.3 L'argument de Hopf

En 1936, Heinz Hopf a donné un argument géométrique permettant de démontrer l'ergodicité du flot géodésique. Il s'agit aussi du point de départ de la réflexion qui a plus tard amené Dmitri Anosov à introduire les systèmes qui portent aujourd'hui son nom.

Définition 61. Soit (X, Φ) un système dynamique topologique. Pour un point $x \in X$, on appelle **feuille stable de x associée à Φ** l'ensemble

$$W^{ss}(x) := \{y \in X \mid d(\Phi^n(x), \Phi^n(y)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\}.$$

La **feuille instable de x associée à Φ** se définit de la même manière comme la feuille stable associée à Φ^{-1} :

$$W^{su}(x) := \{y \in X \mid d(\Phi^{-n}(x), \Phi^{-n}(y)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\}.$$

Les feuilles stables (resp. instables) associées à Φ partitionnent l'espace X . On appelle **distribution stable** (resp. **distribution instable**) les partitions en feuilles stables (resp. instables).

Remarque 62. Un principe général en mathématiques veut que bien souvent, lorsque deux objets apparemment différents portent le même nom, cela s'explique par un lien profond entre deux points de vues. La différence entre un principe et un théorème est que le premier peut être vague et parfois incorrect, c'est le cas ici : inutile de chercher trop loin, il n'y a pas de lien entre nos distributions et les généralisations des fonctions introduites par Laurent Schwartz. Dans la littérature, ces objets sont parfois aussi appelés « feuilletage stable/instable », ce qui est cohérent avec le terme « feuille », mais il faut prendre garde au fait qu'il ne s'agit pas exactement de feuilletages au sens usuel du terme (même remarque pour la terminologie « lamination »).

Exemple 63. Dans le cas de la cat map, si on note F^u le sous-espace propre dilaté et F^s le sous-espace propre contracté par la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors la feuille stable et la feuille instable associées à un point $x \in \mathbb{T}^2$ sont les projections sur le tore des droites $F^u + x$ et $F^s + x$.

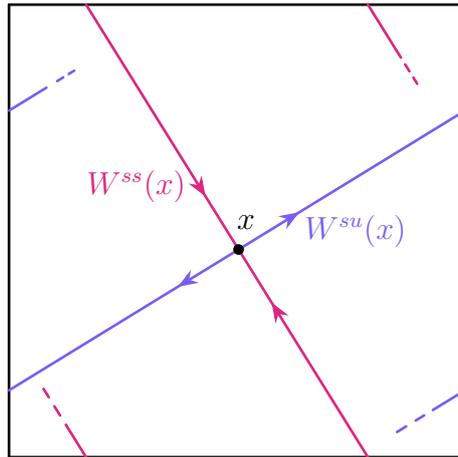


FIGURE 18 – Feuilles stable et instable pour la cat map

Définition 64. Soit (X, Φ, μ) un système dynamique où μ est une mesure de probabilités et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que f est **W^{ss} -invariante** s'il existe un sous-ensemble $X_0 \subset X$ de mesure pleine (c'est-à-dire vérifiant $\mu(X_0) = 1$) tel que la restriction de f à X_0 est constante sur les feuilles stables :

$$\forall x, y \in X_0, \quad (y \in W^{ss}(x) \implies f(x) = f(y)).$$

On définit de même les fonctions W^{su} -invariantes.

Intuitivement, une fonction W^{ss} -invariante est une fonction qui pousse tout le monde à l'extrémité de sa feuille, le lemme technique suivant n'est donc pas très surprenant :

Lemme 65. *Soit (X, Φ, μ) un système dynamique où μ est une mesure de probabilités et $f \in L^2(X)$. Alors les valeurs d'adhérences faibles de la suite $(f \circ \Phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont W^{ss} et W^{su} -invariantes.*

Pour une démonstration basée sur le lemme de Banach-Saks, on renvoie à l'annexe A.7.

Si on prend pour f une fonction Φ -invariante, alors la suite $(f \circ \Phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et égale à f , ce qui démontre le théorème suivant :

Théorème 66 (Argument de Hopf). *Soit (X, Φ, μ) un système dynamique où μ est une mesure de probabilités. Alors toute fonction $f \in L^2(X)$ qui est Φ -invariante est aussi W^{ss} et W^{su} -invariante.*

Ce résultat peut s'interpréter de la façon suivante : du point de vue de la mesure, les espaces invariants par Φ se décomposent en une union de feuilles stables (ou en une union de feuilles instables).

On retrouvera dans [Cou12] une nouvelle démonstration du mélange de la cat map utilisant ce théorème.

Comme on l'a dit, ce résultat a historiquement permis de démontrer l'ergodicité du flot géodésique sur une surface hyperbolique compacte. On retrouvera, toujours dans [Cou12], une démonstration de ce résultat basée sur l'argument de Hopf.

Nous terminerons ce mémoire en démontrant un résultat plus fort (proposition 19), à savoir que le flot géodésique est mélangeant.

2.4 Flots Anosov

La pertinence de l'argument de Hopf dépend du système étudié et en particulier de la nature des feuilles stables et instables. Par exemple, si Φ est une isométrie, les feuilles se réduisent chacune à un seul point et on n'apprend rien de nouveau.

Dans les années 60, Dmitri Anosov a introduit une classe importante de systèmes qui portent désormais son nom et pour lesquels il est naturel d'avoir recours à l'argument de Hopf. Commençons par donner leur définition dans le cadre d'une dynamique discrète :

Définition 67 (Difféomorphisme Anosov). Un difféomorphisme Φ d'une variété riemannienne compacte M munie d'une métrique $\|\cdot\|$ quelconque est dit **Anosov** si le fibré tangent de M se décompose en la somme directe

$$TM = E^u \oplus E^s,$$

où E^u et E^s sont deux sous-fibrés stables par la différentielle $D\Phi$, et dont le premier est dilaté et l'autre contracté par l'action de Φ , c'est-à-dire tels qu'il existe deux constantes $C > 0$, $0 < \lambda < 1$ telles que ces espaces vérifient les conditions :

$$\forall x \in M, D_x \Phi(E^u(x)) = E^u(\Phi(x)), \text{ et } D_x \Phi(E^s(x)) = E^s(\Phi(x)),$$

$$\|D_x \Phi^n|_{E^s}\| \leq C\lambda^n, \text{ et } \|D_x \Phi^{-n}|_{E^u}\| \leq C\lambda^n.$$

Les fibrés E^s et E^u sont appelés respectivement **fibré stable** et **fibré instable** (*unstable* en anglais, d'où le u en exposant).

Exemple 68. Un exemple de difféomorphisme Anosov que l'on commence à bien connaître est la cat map. En effet, cette application agit linéairement sur le tore donc est partout égale à sa différentielle, et le fibré instable E^u (resp. le fibré stable E^s) est alors l'union des feuilles instables (resp. l'union des feuilles stables) décrites à l'exemple 63.

Historiquement, l'exemple qui a mené Anosov à formaliser sa notion est le flot géodésique sur des surfaces hyperboliques. Voici comment la définition s'écrit dans le cadre continu :

Définition 69 (Flot Anosov). Un flot non singulier (c'est-à-dire sans orbite réduite à un seul point) φ_t défini sur une variété riemannienne compacte M munie d'une métrique $\|\cdot\|$ quelconque est dit **Anosov** si le fibré tangent de M se décompose en la somme directe

$$TM = E^0 \oplus E^u \oplus E^s,$$

où $E^0 = \mathbb{R} \frac{d}{dt} \varphi_t$ est la direction du flot, et où E^u, E^s sont deux sous-fibrés préservés par $D\varphi_t$ pour lesquels il existe deux constantes $C > 0$, $0 < \lambda < 1$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \forall v \in E^s, \|D\varphi_t(v)\| \leq C\lambda^t \|v\|,$$

$$\text{et } \forall t \in \mathbb{R}^*, \forall v \in E^u, \|D\varphi_{-t}(v)\| \leq C\lambda^t \|v\|.$$

Les fibrés E^s et E^u sont appelés respectivement **fibré stable** et **fibré instable**.

On appelle de plus **distribution stable faible** et **distribution instable faible** les ensembles $E^0 \oplus E^s$ et $E^0 \oplus E^u$.

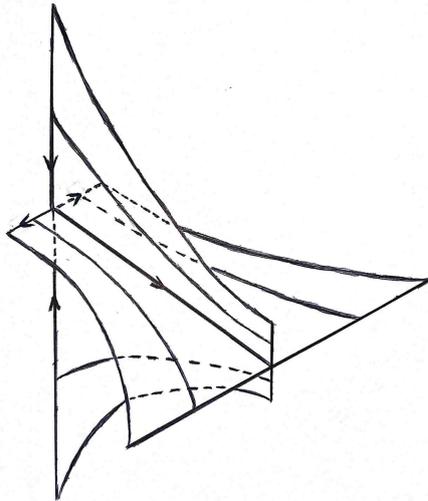


FIGURE 19 – Allure locale d'un flot Anosov en dimension 3

Exemple 70. Donnons un premier exemple de flot Anosov : le flot de suspension de la cat map, c'est-à-dire le flot $\frac{\partial}{\partial t}$ sur \mathbb{T}_Φ^2 , où $\Phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ désigne la cat map (voir exemple 32). Il s'agit bien d'un flot Anosov puisqu'on retrouve la cat map (qui est un difféomorphisme Anosov) transversalement à ce flot. Notons qu'il n'est pas mélangeant (dans aucun sens du terme) puisqu'il s'agit d'un flot de suspension.

Plus généralement, on peut démontrer le résultat suivant :

Proposition 71. *Si Φ est un difféomorphisme Anosov d'une variété compacte M , alors la suspension de Φ sur M_Φ est un flot Anosov.*

Comme on peut s'en douter, le flot géodésique sur une surface hyperbolique compacte est lui aussi Anosov ; on détaillera ce point à la section suivante. En attendant, on donne (souvent sans démonstration, mais avec des références) des résultats supplémentaires fondamentaux sur les flots d'Anosov qui permettent de redécouvrir les résultats de la section 2.2 dans un cadre plus large.

Définition 72. Soit (X, Φ) un système dynamique topologique. Un point $x \in X$ est dit **non-errant** pour Φ si pour tout voisinage ouvert U de x , il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\Phi^n(U) \cap U \neq \emptyset.$$

On note $NW(\Phi)$ l'ensemble des points non-errants (*nonwandering* en anglais) pour Φ .

Remarque 73. Toutes les définitions et résultats se traduisent facilement du cadre continu vers le cadre discret, et inversement.

Théorème 74 (de récurrence de Poincaré). *Soit (X, Φ, μ) un système dynamique (où μ est une mesure de probabilité). Alors pour toute partie mesurable $A \subset X$:*

$$\mu(\{x \in A \mid \#\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi^n(x) \in A\} < \infty\}) = 0.$$

Autrement dit, du point de vue de la mesure, tous les points de A repassent une infinité de fois en A .

Démonstration. Il est équivalent de démontrer que pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on a $\mu(R_N) = 0$, où

$$R_N := \{x \in A \mid \{\Phi^n(x)\}_{n \geq N} \subset X \setminus A\}.$$

En effet, si on note $R_\infty := \{x \in A \mid \#\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi^n(x) \in A\} < \infty\}$, alors R_∞ est l'union croissante des R_N , et s'ils sont tous de mesure nulle alors par propriété de la mesure R_∞ aussi.

De plus, si on pose un $N \in \mathbb{N}$ fixé, en considérant le difféomorphisme $\tilde{\Phi} := \Phi^N$, on voit qu'on se ramène à traiter le cas $N = 1$.

Finalement, il nous suffit donc de montrer que $\mu(\bar{A}) = 0$, où

$$\bar{A} := \{x \in A \mid \{\Phi^n(x)\}_{n \geq 1} \subset X \setminus A\}.$$

Tout d'abord, $\bar{A} = A \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi^{-n}(X \setminus A))$ donc est mesurable. De plus, pour tout entier $n \geq 1$, on a $\Phi^{-n}(\bar{A}) \cap \bar{A} = \emptyset$, donc en particulier pour tous entiers $1 \leq n < m$,

$$\Phi^{-n}(\bar{A}) \cap \Phi^{-m}(\bar{A}) = \Phi^n(\bar{A} \cap \Phi^{-(m-n)}(\bar{A})) = \Phi^n(\emptyset) = \emptyset.$$

En se rappelant que μ est Φ -invariante, et donc que pour tout entier n on a $\mu(\Phi^{-n}(\bar{A})) = \mu(\bar{A})$, on a donc finalement :

$$1 = \mu(X) \geq \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \Phi^{-n}(\bar{A})\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\Phi^{-n}(\bar{A})) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\bar{A}).$$

On a donc nécessairement $\mu(\bar{A}) = 0$, c'est ce qu'on voulait montrer. \square

De ce théorème, on déduit l'égalité $NW(\varphi_t) = M$ pour φ_t un flot Anosov **qui préserve une mesure qui charge tous les ouverts** sur une variété compacte M .

Remarque 75. La partie surlignée est cruciale, il existe des flots Anosov qui ne vérifient pas cette hypothèse et pour lesquels ce résultat, ainsi que celui sur la transitivité topologique, sont faux! Un exemple a été construit dans les années 70 par Franks et Williams dans l'article [FW06]. Ces flots sont qualifiés d'« *anomalous* » (« anormaux » en français) : avant la parution de cet article, on conjecturait que tous les flots Anosov vérifiaient l'égalité $NW(\varphi_t) = M$. On pourra aussi consulter la section 8.3 de [HF19].

Comme on le verra, le flot géodésique vient bien avec une mesure borélienne invariante non nulle (et même avec une infinité indénombrable de mesures de ce type), donc tout va bien en ce qui nous concerne.

En appliquant le lemme suivant et le résultat précédent au flot géodésique sur une surface hyperbolique compacte, on retrouve le théorème 58.

Théorème 76 (Lemme de pistage). *L'ensemble des points périodiques pour un flot Anosov sur une variété compacte M est dense dans l'ensemble des points non-errants.*

En développant encore des techniques propres aux flots Anosov, on peut aussi démontrer le théorème 60. Pour ce faire, on commence par démontrer le théorème suivant ² :

Théorème 77. *L'ensemble des points non-errants d'un flot Anosov se décompose de manière unique en une union finie et disjointe de fermés invariants par le flot et sur lesquels ce dernier est topologiquement transitif.*

En combinant ce résultat avec le fait que sous les bonnes hypothèses (surface compacte et existence d'une mesure invariante) l'ensemble des points non-errants d'un flot est la surface entière, on obtient la généralisation annoncée :

Théorème 78. *Un flot Anosov qui préserve une mesure qui charge tous les ouverts sur une variété compacte M est topologiquement transitif.*

2.5 Flot horocyclique et distributions stables/instables

Comme on l'a annoncé, la dynamique du flot géodésique est intrinsèquement liée au fait qu'il s'agit d'un flot Anosov, et donc à ses fibrés stable et instables, que nous décrivons maintenant.

Repartons de la proposition 48 : On a vu que pour deux géodésiques verticales de même extrémité future ∞ paramétrées par longueur d'arc, deux points de même ordonnée dans le modèle du demi-plan se rapprochent exponentiellement vite en l'infini. Cela montre aussi qu'étant donné un point $z \in \mathbb{H}^2$, les seules points z' qui se rapprochent de z en l'infini lorsqu'on leur fait tout deux suivre la géodésique verticale qui les porte (par longueur d'arc) sont exactement les points z' de même ordonnée que z . On appelle **horocycle** centré en ∞ passant par z la droite horizontale passant par z . La terminologie vient du fait qu'on peut voir cette droite comme un cercle dont le centre est le point à l'infini : dans le modèle du demi-plan, l'image de cette droite par une action sur le disque qui envoie l'infini sur un autre point x du bord est un cercle tangent à l'axe \mathbb{R} en x . On dit encore que ces cercles sont des **horocycles** centrés en x .

On peut faire le même raisonnement avec des géodésiques paramétrées dans le sens inverse et finalement on obtient la proposition :

Proposition 79. *La feuille stable d'un point $v \in T^1\mathbb{H}^2$ associée au flot géodésique g_t est le champ de vecteurs unitaire normal à l'horocycle centré en $g_\infty(v) := \lim_{t \rightarrow \infty} g_t(v)$ et passant par v .*

La feuille instable de v associée au flot géodésique g_t est le champ de vecteurs unitaire normal à l'horocycle centré en $g_{-\infty}(v) := \lim_{t \rightarrow -\infty} g_t(v)$ et passant par v .

De plus, les points situés sur une même feuille stable se rapprochent exponentiellement vite sous l'action (future) du flot géodésique.

En considérant l'union des feuilles stables et instables, on retrouve les notions de distribution stable/instable de la définition 69, ce qui justifie que le flot géodésique sur une surface hyperbolique est Anosov.

On en profite pour introduire les flots horocycliques :

². On pourra retrouver la preuve dans [PS70], Theorem 2.1, p.152. Plus généralement, pour les résultats de cette partie, on pourra aussi consulter [HF19].

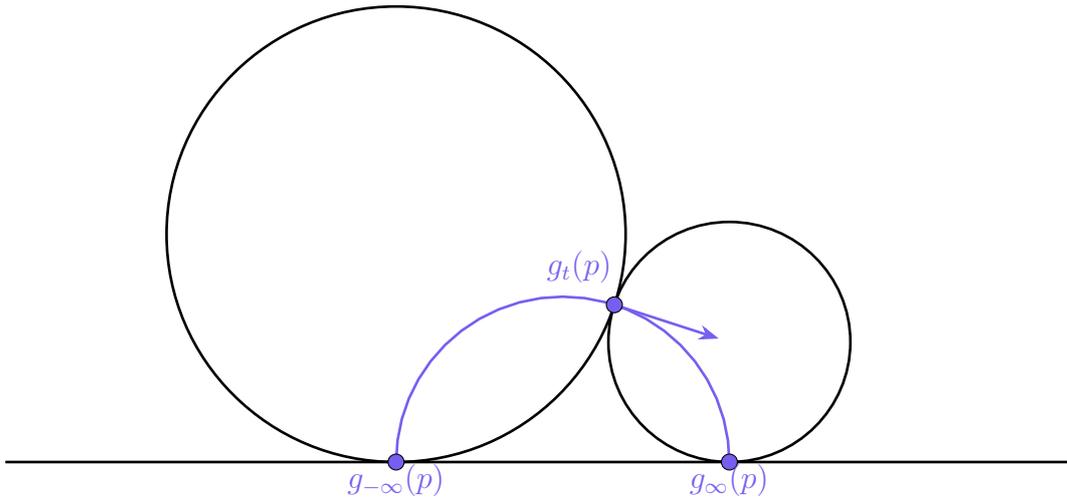


FIGURE 20 – Horocycles stable et instable

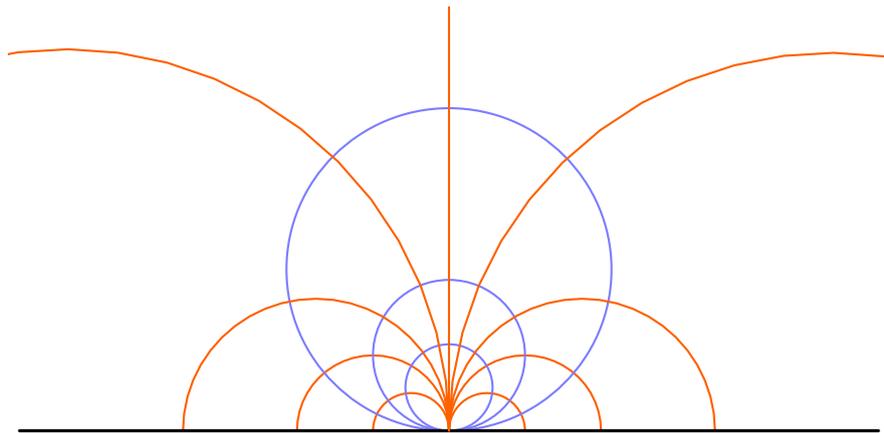


FIGURE 21 – Géodésiques et horocycles dans le modèle du demi-plan

Définition 80. Le **flot horocyclique stable** h_t^- est le flot dont l'action sur un élément $v \in T^1\mathbb{H}^2$ est celle telle que $h_{t_0}^-(v)$ est le vecteur appartenant à l'horocycle stable associé à v et dont le point base est celui à distance $|t_0|$ du point base de v .

Le **flot horocyclique instable** h_t^+ est défini de la même manière en suivant l'horocycle instable.

La définition qu'on a donnée du flot horocyclique est pour l'instant peu maniable, on va maintenant donner un nouveau formalisme qui va nous permettre d'exploiter ces notions à leur plein potentiel.

2.6 Modèle algébrique des flots

En reprenant l'identification entre le fibré unitaire tangent du plan hyperbolique et le groupe $PSL_2(\mathbb{R})$ développée à partir du théorème 56, et en particulier l'isomorphisme explicite ψ défini à la suite de la remarque 57, on peut voir les flots sur \mathbb{H}^2 comme des sous-groupes à un paramètre de $PSL_2(\mathbb{R})$.

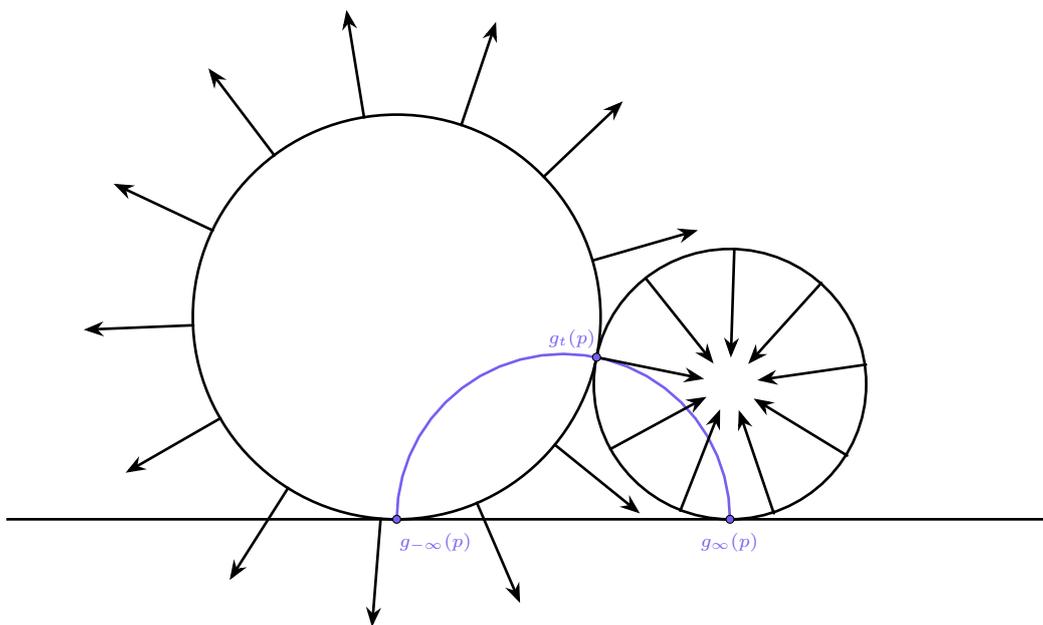


FIGURE 22 – Flots horocycliques

Proposition 81. *L'action du flot géodésique g_t sur \mathbb{H}^2 est identifiée via l'isomorphisme ψ à la multiplication à droite dans $PSL_2(\mathbb{R})$ par le sous-groupe à un paramètre*

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pour démontrer cette identification, on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 82. *Le flot géodésique sur \mathbb{H}^2 commute avec les différentielles des isométries de \mathbb{H}^2 .*

Démonstration. Soit $\alpha : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ une isométrie. L'action de α sur un élément (x, v) de $T^1\mathbb{H}^2$ est alors donnée par $\alpha \cdot (x, v) = (\alpha(x), D_x\alpha(v))$.

Soit donc $(x, v) \in T^1\mathbb{H}^2$ et $t \in \mathbb{R}$. On veut montrer l'égalité

$$\alpha(g_t(x, v)) = g_t(\alpha(x, v)),$$

où g désigne le flot géodésique. La démonstration se lit sur le dessin de la figure 23 : Il faut se rappeler que les isométries envoient les géodésiques sur des géodésiques. Si on note γ la géodésique engendrée par (x, v) , on a d'une part :

- $g_t((x, v)) \in \gamma$, donc $\alpha(g_t((x, v))) \in \alpha(\gamma)$,
- et d'autre part, on a également $g_t(\alpha((x, v))) \in \alpha(\gamma)$ puisque, comme α préserve les géodésiques, $D_x\alpha(v)$ est le vecteur tangent à $\alpha(\gamma)$ en $\gamma(x)$.

Comme α préserve les distances sur \mathbb{H}^2 , et que g_t préserve les distances le long de géodésiques, on a bien l'égalité voulue. □

Passons maintenant à la démonstration de la proposition 81.

Démonstration. On reprend ici les notations de la fin de la partie 2.1. On note $v_0 = (i, i) \in T^1\mathbb{H}^2$.

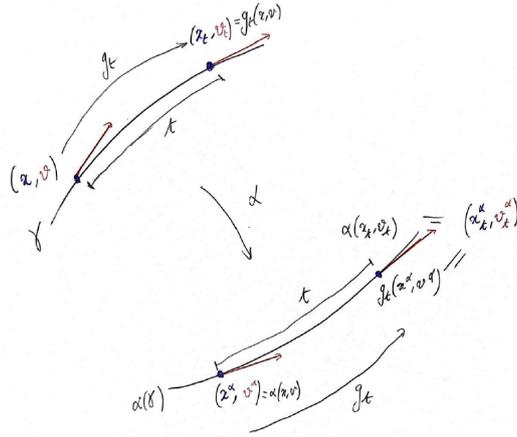


FIGURE 23 – Le flot géodésique commute avec les différentielles des isométries.

Rappelons que la géodésique verticale passant par i dans le modèle du demi-plan est paramétrée par longueur d'arc via $t \mapsto ie^t$ (proposition 46). Pour tout réel t , notons $v_t := (ie^t, ie^t) \in T^1\mathbb{H}^2$. On a alors pour tout t , $\psi(v_t) = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} =: G_t$. Ainsi, on a pour tout t , $v_t = g_t(v_0)$, et donc $\psi(g_tv_0) = G_t$.

Soit maintenant $\gamma \in Isom^+(\mathbb{H}^2)$. D'après le lemme 82, pour tout $t \in \mathbb{R}$, en considérant les actions par homographie, on a

$$g_t \cdot \gamma \cdot v_0 = \gamma \cdot g_t \cdot v_0,$$

et en appliquant l'isomorphisme $\psi : T^1\mathbb{H}^2 \rightarrow PSL_2(\mathbb{R})$ on obtient l'égalité recherchée :

$$\psi(g_t \cdot \gamma \cdot v_0) = \psi(\gamma)G_t.$$

□

On en déduit les expressions algébriques des flots horocycliques stables et instables. De manière analogue à ce qu'on a fait pour le flot géodésique, on considère la paramétrisation par longueur d'arc des horocycles stable/instable associés au point $w_0 := (i, i) \in T_i^1\mathbb{H}^2$: Pour l'horocycle instable, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$w_t^+ := h_t^-(w_0) = (i + t, i) \in T_{i+t}^1\mathbb{H}^2.$$

L'application ψ nous fournit alors la paramétrisation de ce flot dans $PSL_2(\mathbb{R})$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, H_t^- := \psi(w_t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On procède de même pour le flot instable en paramétrisant l'horocycle instable. On résume ces résultats dans l'énoncé suivant :

Proposition 83. *Les actions des flots horocycliques instable et stable h_t^+ et h_t^- sur \mathbb{H}^2 s'identifient respectivement via l'isomorphisme ψ à la multiplication à gauche dans $PSL_2(\mathbb{R})$ par les sous-groupes à un paramètre*

$$H^- := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \text{ et } H^+ := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Un premier intérêt de ces paramétrisations est de permettre de donner des formules reliant les flots horocycliques et le flot géodésiques. La preuve revient alors à un simple calcul matriciel, mais on va quand même tenter de motiver géométriquement ces mystérieuses épiphanies algébriques.

Commençons par appliquer un principe cher à tout.e géomètre, le principe de conjugaison (qu'on retrouvera abondamment illustré par exemple dans [Aud06] ou dans [CG18]) :

Principe 84 (de conjugaison). Soit G un groupe de transformations agissant sur un ensemble X et g, h deux éléments de G .

1. le conjugué hgh^{-1} de g par h est de même nature géométrique que g .
2. les éléments caractérisant cette nature (direction, axe, points fixes, orbites...) pour le conjugué hgh^{-1} sont les images dans X de ceux de g par l'action de h .

En l'occurrence, en appliquant ce principe à des trajectoires le long de géodésiques, on pressent qu'en conjuguant le flot horocyclique par le flot géodésique, on se déplacera toujours le long d'horocycles, mais avec une distance parcourue influencée par les coefficients du flot géodésique. Et en effet, c'est bien ce qu'il se passe :

Proposition 85. Pour tous réels $s, t \in \mathbb{R}$, on a :

$$g_t \circ h_s^+ \circ g_{-t} = h_{se^{-t}}^+, \text{ et aussi } g_t \circ h_s^- \circ g_{-t} = h_{se^t}^-.$$

Démonstration. Comme annoncé, il suffit de le vérifier par un calcul matriciel. □

Une autre façon de comprendre cette formule (par exemple pour le flot instable) est de la voir non pas comme une conjugaison mais comme une « presque commutation » :

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, g_t \circ h_s^- = h_{se^{-t}}^- \circ g_t.$$

Dans le modèle du demi-plan et pour une géodésique verticale (et donc des horocycles horizontaux), l'intuition géométrique est alors la suivante : « en raison de la métrique hyperbolique, les segments euclidiens horizontaux sont plus courts en haut qu'en bas ». Ainsi, dans le schéma suivant (qui n'est pas à l'échelle), la trajectoire orange est plus longue que la trajectoire bleue :

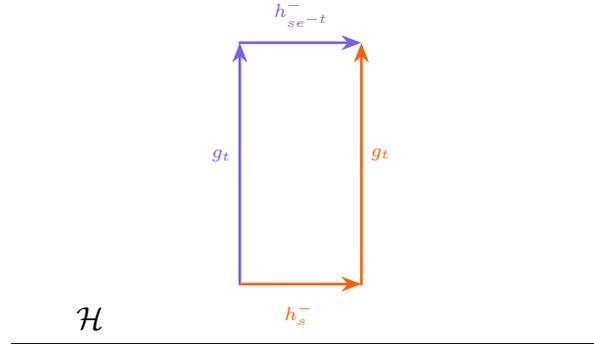


FIGURE 24 – Les chemins ne sont pas de la même longueur !

Plus généralement, cette formule est la traduction du fait que le flot géodésique contracte ou dilate les horocycles (c'est-à-dire les orbites du flot horocyclique) par un facteur exponentiel.

Tant qu'on parle de commutation, on peut se demander si les flots stables et instables commutent. D'après l'intuition précédente, on serait en droit d'en douter. Pour vérifier cela, on calcule le commutateur (encore une fois le calcul est facilité par la représentation matricielle).

Remarque 86. Donnons un point de vue plus riche et motivant pour la lectrice familière de théorie de Lie : On peut se douter que c'est une idée judicieuse en remarquant que les matrices G_t, H_t^+, H_t^- ne sont autres que les images par l'exponentielle des matrices qui forment une base bien connue de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$:

$$\exp\left(t \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}\right) = G_t, \quad \exp\left(t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = H_t^+, \quad \text{et} \quad \exp\left(t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = H_t^-.$$

En effet, les flots géodésiques et horocycliques sont des flots sur $T^1\mathbb{H}^2$ et sont donc associés à des champs de vecteurs vivant dans $T^1(T^1(\mathbb{H}^2))$, c'est-à-dire dans l'espace tangent de $PSL_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, où on sait bien qu'on a la relation $[Y, Z] = YZ - ZY = 2X$, où

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, cette remarque montre que le flot géodésique est ce qu'on appelle un **flot de contact**.

En jouant un peu avec les coefficients, on obtient cette expression :

Proposition 87. [Formule du quadrilatère] Pour tous réels positifs $s, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on a l'égalité :

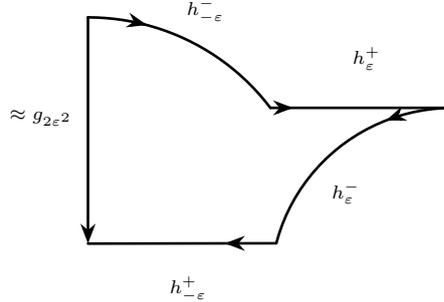
$$h_{\frac{s-1-\varepsilon}{\varepsilon}}^+ \circ h_{\varepsilon}^- \circ h_{\frac{s-1}{\varepsilon}}^+ \circ h_{\frac{-\varepsilon}{s}}^- = g_{2 \ln s}.$$

Démonstration. Il suffit encore une fois de vérifier l'égalité avec un produit matriciel. \square

Apportons une fois de plus un éclairage géométrique à cette obscure formule : Si pour un ε fixé (et petit, comme tout bon ε qui se respecte) on choisit $s = 1 + \varepsilon^2$, en approximant les différents coefficients la formule devient presque :

$$h_{-\varepsilon}^+ \circ h_{\varepsilon}^- \circ h_{\varepsilon}^+ \circ h_{-\varepsilon}^- \approx g_{2\varepsilon^2}.$$

En première approximation, cela signifie qu'en se baladant le long d'un quadrilatère dont les côtés sont de longueur un petit ε et portés par des horocycles, on ne retombe pas sur ses pas : on a en fait avancé le long de la géodésique d'où on partait d'une longueur $\approx 2\varepsilon^2$:



\mathcal{H}

FIGURE 25 – La formule du « quadrilatère » révélée

Avant d'entamer l'étape finale de notre périple, faisons une dernière application de notre modèle algébrique. Depuis le début de ce texte, on motive notre progression par la promesse d'une démonstration du « mélange du flot géodésique ». Cependant, comme on l'a vu dans la première partie, la notion de mélange est intrinsèquement liée à la mesure avec laquelle on observe la dynamique de notre système. Se pose alors tout naturellement la question du choix d'une mesure **invariante par le flot géodésique** sur T^1S (ou plutôt sur $T^1\mathbb{H}^2$). Est-on même sûr qu'une telle mesure existe ?

C'est au tour de la théorie de Lie de venir à notre secours. Via l'isomorphisme entre $T^1\mathbb{H}^2$ et $PSL_2(\mathbb{R})$, on se ramène au problème de trouver une mesure invariante par l'action de translation à gauche du groupe à un paramètre G_t sur $PSL_2(\mathbb{R})$... et on connaît une mesure qui vérifie cela pour **tous** les éléments d'un groupe de Lie, c'est la mesure de Haar ! Il s'agit d'un résultat qui fait désormais partie du folklore mathématique : Tout groupe de Lie admet une mesure invariante à gauche, et celle-ci est unique (à multiplication près) pour une classe de groupes appelés **groupes unimodulaires** (dont fait notamment partie $PSL_2(\mathbb{R})$, puisqu'il est semi-simple) : on appelle cette/ces mesure(s) la/les **mesure(s) de Haar**. C'est avec cette mesure qu'on travaillera désormais. Elle apparaît naturellement via d'autres points de vue et porte un autre nom lorsqu'on la voit comme mesure sur $T^1\mathbb{H}^2$: on parle de la **mesure de Liouville**.

Signalons qu'on aurait pu faire d'autres choix de mesure invariante, mais que la mesure de Liouville est la seule mesure invariante par G_t qui soit lisse, dans le sens où c'est la seule mesure invariante qui dans une carte de la variété est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue, et de densité lisse.

Toute ambiguïté étant levée, on peut finalement se pencher à nouveau sur un problème de mélange.

2.7 Mélange du flot géodésique

Pour conclure notre voyage à la découverte du flot géodésique, on démontre qu'il est mélangeant pour la mesure de Liouville sur des surfaces hyperboliques compactes. On notera \mathcal{L} cette mesure. On suit la démonstration présentée par Yves Coudène dans [Cou11]. On va mettre à profit les expressions algébriques introduites à la section 2.6.

On se place donc encore sur une surface hyperbolique compacte S qu'on munit de la mesure induite par la mesure de Liouville sur \mathbb{H}^2 (et qu'on appellera encore « mesure de Liouville »), éventuellement renormalisée pour en faire une mesure de probabilité.

Commençons par un petit lemme pratique :

Lemme 88. *Pour montrer qu'un système dynamique (X, φ_t, μ) est mélangeant, c'est-à-dire que pour toutes fonctions $f, g \in L^2(X)$, on a*

$$\langle f \circ \varphi_t, g \rangle \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_X f d\mu \int_X g d\mu,$$

il suffit de montrer la même convergence pour toutes fonctions $f, g \in L^1(X)$ avec $\int_X f d\mu = 0$.

Démonstration. Considérons deux fonctions $f, g \in L^2(X)$ et supposons le lemme démontré dans le cas où une des deux fonctions est d'intégrale nulle. La preuve du lemme se résume alors juste à une petite astuce de calcul :

$$\begin{aligned} \int_X (f \circ \varphi_t) g d\mu &= \int_X \left(\left(f + \int_X f d\mu - \int_X f d\mu \right) \circ \varphi_t \right) g d\mu \\ &= \underbrace{\int_X \left(\left(f - \int_X f d\mu \right) \circ \varphi_t \right) g d\mu}_{\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0} + \underbrace{\int_X \left(\int_X f d\mu \right) \circ \varphi_t g d\mu}_{= \int_X f d\mu \int_X g d\mu} \\ &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_X f d\mu \int_X g d\mu. \end{aligned}$$

□

Lemme 89. Soit $f \in L^2(S)$. Les valeurs d'adhérence faibles de la suite $(f \circ g_t)_{t>0}$ sont invariante par h_s^+ , et celles de $(f \circ g_t)_{t<0}$ sont invariante par h_s^- .

Démonstration. Soit $\bar{f} \in L^2(X)$ et une suite réelle croissante $(t_i)_i$, avec $t_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$, telle qu'on ait la convergence faible :

$$f \circ g_{t_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \bar{f}.$$

Montrons l'invariance, c'est-à-dire l'égalité $\bar{f} \circ h_s^+ = \bar{f}$. On repart de la formule de conjugaison (proposition 85) $g_t \circ h_s^+ = h_{se-t}^+ g_t$. Pour la norme L^2 on en déduit :

$$\|f \circ g_t \circ h_s^+ - f \circ g_t\| = \|f \circ h_{se-t}^+ \circ g_t - f \circ g_t\| = \|f \circ h_{se-t}^+ - f\|.$$

On sait que $h_{se-t}^+ \xrightarrow{t \rightarrow \infty} id$ pour n'importe quelle norme sur $PSL_2(\mathbb{R})$, ce qui implique alors la convergence $\|f \circ h_{se-t}^+ - f\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. En effet, si f est continue, comme S est compacte c'est une conséquence du théorème de convergence dominée (TCD). Si f n'est pas continue, on peut l'approximer par $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues et écrire alors

$$\|f \circ h_{se-t}^+ - f\| \leq \underbrace{\|f \circ h_{se-t}^+ - f_n \circ h_{se-t}^+\|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} + \underbrace{\|f_n \circ h_{se-t}^+ - f_n\|}_{\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \text{ (TCD)}} + \underbrace{\|f_n - f\|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0},$$

la première limite se justifiant par un changement de variable.

On obtient donc

$$\|f \circ g_t \circ h_s^+ - f \circ g_t\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Par ailleurs, on a

$$f \circ g_{t_i} \circ h_s^+ - f \circ g_{t_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \bar{f} \circ h_s^+ - \bar{f},$$

donc finalement on a bien $\bar{f} \circ h_s^+ - \bar{f} = 0$. \square

En particulier, par le même raisonnement avec la norme L^2 , toute fonction invariante par le flot géodésique est donc invariante par les flots horocycliques.

Montrons la réciproque :

Lemme 90. Toute fonction $f \in L^2(S)$ invariante par h_s^+ est invariante par g_t .

Démonstration. On part cette fois de la formule du quadrilatère (proposition 87) : soient $s, \varepsilon > 0$. On a alors

$$h_{\frac{s-1-1}{\varepsilon}}^+ \circ h_{\varepsilon}^- \circ h_{\frac{s-1}{\varepsilon}}^+ \circ h_{-\varepsilon/s}^- = g_{2 \ln s}.$$

Comme pour la démonstration précédente, on passe à la norme L^2 et on utilise notre formule pour conclure :

$$\begin{aligned} \|f \circ g_{2 \ln s} - f\| &= \|f \circ h_{\frac{s-1-1}{\varepsilon}}^+ \circ h_{\varepsilon}^- \circ h_{\frac{s-1}{\varepsilon}}^+ \circ h_{-\varepsilon/s}^- - f\| \\ &= \|f \circ h_{\varepsilon}^- \circ h_{\frac{s-1}{\varepsilon}}^+ \circ h_{-\varepsilon/s}^- - f\|, \text{ car } h_s^+ \text{ est invariante par } f, \\ &= \|f \circ h_{\varepsilon}^- \circ h_{\frac{s-1}{\varepsilon}}^+ \circ h_{-\varepsilon/s}^- - f + (-f \circ h_{\frac{s-1}{\varepsilon}}^+ \circ h_{-\varepsilon/s}^- + f \circ h_{-\varepsilon/s}^-)\| \\ &\leq \|f \circ h_{\varepsilon}^- \circ h_{\frac{s-1}{\varepsilon}}^+ \circ h_{-\varepsilon/s}^- - f \circ h_{\frac{s-1}{\varepsilon}}^+ \circ h_{-\varepsilon/s}^- \| + \|f \circ h_{-\varepsilon/s}^- - f\| \\ &= \|f \circ h_{\varepsilon}^- - f\| + \|f \circ h_{-\varepsilon/s}^- - f\| \end{aligned}$$

On sait que $h_{\varepsilon}^- \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} id$ pour n'importe quelle norme sur $PSL_2(\mathbb{R})$, ce qui implique alors la convergence $\|f \circ h_{\varepsilon}^- - f\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, par les mêmes arguments que ceux donnés dans la démonstration du lemme 89.

On montre de même la limite $\|f \circ h_{\frac{-\varepsilon}{s}} - f\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, et finalement on a donc

$$\|f \circ g_{2 \ln s} - f\| = 0.$$

Cela achève de montrer l'égalité $f \circ g_{2 \ln s} = f$. \square

Tout est en place pour finir en beauté :

Théorème 91. *Le flot géodésique sur S est mélangeant pour la mesure de Liouville.*

Démonstration. Soit $f \in L^2(T^1S)$ telle que $\int_{T^1S} f d\mathcal{L} = 0$. On souhaite montrer la convergence faible

$$f \circ g_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Comme T^1S est compact, cela revient à montrer que toutes les valeurs d'adhérence faible de $(f \circ g_t)_{t>0}$ sont nulles \mathcal{L} -presque partout. Soit donc $\bar{f} \in L^2(T^1S)$ une telle valeur d'adhérence faible (qui est donc définie \mathcal{L} -presque partout). Par le lemme 89, \bar{f} est invariante par h_t^- , donc est aussi invariante par g_t par le lemme 90, et donc par h_t^+ . En reprenant le modèle algébrique, on voit que tout élément de $PSL_2(\mathbb{R})$ se décompose en un produit d'éléments de G_t, H_t^+ et H_t^- , donc \bar{f} est invariante par l'action de $PSL_2(\mathbb{R})$:

$$\forall \gamma \in PSL_2(\mathbb{R}), \mathcal{L} - p.t. x \in S, \bar{f}(\gamma \cdot x) = \bar{f}(x).$$

Un théorème de Fubini permet d'échanger les quantificateurs du point de vue de la mesure (pour plus de clarté, on note μ la mesure de Haar sur $PSL_2(\mathbb{R})$) :

$$\mathcal{L} - p.t. x \in S, \mu - p.t. \gamma \in PSL_2(\mathbb{R}), \bar{f}(\gamma \cdot x) = \bar{f}(x).$$

En particulier, il existe donc un $x_0 \in X$ tel que pour μ -presque tout $\gamma \in PSL_2(\mathbb{R})$, on ait $\bar{f}(\gamma \cdot x_0) = \bar{f}(x_0)$. La fonction \bar{f} est donc constante \mathcal{L} -presque partout, et comme c'est une valeur d'adhérence faible de $(f \circ g_t)_{t>0}$ et comme g_t est un difféomorphisme pour tout $t > 0$, on a

$$\int_X f \circ g_t d\mathcal{L} = 0,$$

il vient $\int_X \bar{f} d\mathcal{L} = 0$. Cela implique que \bar{f} est nulle (\mathcal{L} -presque partout), ce qui conclut ce mémoire. \square

A Annexes

A.1 Existence d'une mesure ergodique

Voici une démonstration (qui n'utilise pas le théorème de Krein-Milman) du théorème 18 :

Démonstration. L'algèbre des fonctions continues sur un espace métrique compact est séparable pour la norme de convergence uniforme. Soit donc $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille dense de fonctions continues sur X un espace métrique compact. Considérons $(\mathfrak{M}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite décroissante de sous-espaces de $\mathfrak{M}(\Phi)$ définie par $\mathfrak{M}_0 := \mathfrak{M}(\Phi)$ et pour tout i ,

$$\mathfrak{M}_{i+1} := \left\{ \mu \in \mathfrak{M}_i \mid \int_X \phi_{i+1} d\mu = \max_{\nu \in \mathfrak{M}_i} \int_X \phi_{i+1} d\nu \right\}.$$

L'application $\nu \mapsto \int_X \phi_{i+1} d\nu$ est continue sur \mathfrak{M}_i , donc les ensembles \mathfrak{M}_{i+1} sont fermés dans \mathfrak{M}_i et non vides. Comme $\mathfrak{M}(\Phi)$ est compact, par récurrence tous les \mathfrak{M}_i le sont. L'espace $\mathfrak{M}(\Phi)$ est métrique et compact donc il est complet, donc l'intersection $\mathfrak{M}_\infty := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{M}_i$ est non vide. En fait, \mathfrak{M}_∞ est constitué de points extrémaux de $\mathfrak{M}(\Phi)$ (et donc de mesures ergodiques), comme nous le montrons maintenant.

Soit $\mu \in \mathfrak{M}_\infty$ que l'on écrit comme combinaison convexe de deux éléments μ_1, μ_2 de $\mathfrak{M}(\Phi)$: $\mu = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$. On a donc, pour toute fonction continue ϕ ,

$$\int_X \phi d\mu = \lambda \int_X \phi d\mu_1 + (1-\lambda) \int_X \phi d\mu_2.$$

En particulier, comme $\mu \in \mathfrak{M}_1$, pour ϕ_1 on a

$$\max_{\nu \in \mathfrak{M}(\Phi) = \mathfrak{M}_0} \int_X \phi_1 d\nu = \lambda \int_X \phi_1 d\mu_1 + (1-\lambda) \int_X \phi_1 d\mu_2,$$

donc nécessairement $\int_X \phi_1 d\mu_1 = \int_X \phi_1 d\mu_2 = \int_X \phi_1 d\mu$, et donc $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}_1$. Par récurrence, on montre ainsi que pour tout entier i , on a $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}_i$, et donc $\int_X \phi_i d\mu_1 = \int_X \phi_i d\mu_2$. Par densité de la famille $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$, cela implique l'égalité $\int_X \phi d\mu_1 = \int_X \phi d\mu_2$ pour toute fonction continue ϕ , et donc finalement l'égalité de mesures $\mu_1 = \mu_2$ en vertu du théorème de représentation de Riesz-Markov (théorème 92). \square

A.2 Théorie de la mesure

Pour les détails et compléments de cette partie, voir [PB23].

Théorème 92 (Théorème de représentation de Riesz-Markov). *Soient X un espace métrique localement compact séparable et ϕ une forme linéaire positive sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}_C(X, \mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact définies sur X (c'est-à-dire que ϕ prend des valeurs positives sur les fonctions positives). Alors, il existe une unique mesure μ définie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$ telle que*

$$\forall f \in \mathcal{C}_C(X, \mathbb{R}), \quad \phi(f) = \int_X f d\mu.$$

Remarque 93. Il s'agit d'un résultat non trivial où la difficulté réside dans la démonstration de l'existence d'une mesure μ comme décrite dans l'énoncé. On utilisera en fait seulement le résultat sur l'unicité de la manière suivante :

Lemme 94. *Soient μ_1, μ_2 deux mesures de probabilité sur X un espace métrique compact telles que pour toute fonction continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ on ait*

$$\int_X f d\mu_1 = \int_X f d\mu_2.$$

Alors les deux mesures μ_1 et μ_2 sont égales.

Démonstration. Notons ϕ la forme linéaire positive sur $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ définie par, pour toute fonction continue f ,

$$\phi(f) := \int_X f d\mu_1 \left(= \int_X f d\mu_2 \right).$$

Rappelons d'abord que dans le cadre dans lequel nous nous plaçons (mesures de probabilité sur un espace métrique compact), on a la caractérisation :

$$\forall A \subset X, \mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A, K \text{ compact}\}.$$

Ainsi, il nous suffit de montrer que μ_1 et μ_2 prennent les mêmes valeurs sur tous les compacts de X pour conclure. Soit donc K un sous-ensemble compact de X . Montrons maintenant

$$\mu_1(K) = \inf\{\phi(f) \mid f \in \mathcal{C}(X, [0, 1]), \chi_K \leq f\}.$$

Soit donc f une fonction continue à valeurs dans $[0, 1]$ telle que $\chi_K \leq f$. On a alors

$$\mu_1(K) = \int_X \chi_K d\mu_1 \leq \int_X f d\mu_1 = \phi(f),$$

donc $\mu_1(K) \leq \inf\{\phi(f) \mid f \in \mathcal{C}(X, [0, 1]), \chi_K \leq f\}$.

Pour l'autre sens de l'inégalité, considérons Ω un ouvert de X contenant le compact K et la suite de terme général défini par $\Omega_0 = \Omega$, et

$$\forall n \geq 1, \Omega_n := \{x \in X \mid d(x, K) \leq 1/n\} \cap \Omega.$$

Il s'agit d'une suite décroissante pour l'inclusion et telle que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n = K$, on a donc par propriété de la mesure $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1(\Omega_n \setminus K) = 0$. On applique maintenant le lemme d'Urysohn, qui nous permet de considérer pour chaque indice n une application $\varphi_n \in \mathcal{C}(X, [0, 1])$ telle que $\chi_K \leq \varphi_n \leq \chi_{\Omega_n}$. En particulier, on a alors :

$$\phi(\varphi_n) = \int_X \varphi_n d\mu_1 \leq \int_X \chi_{\Omega_n} d\mu_1 = \mu_1(\Omega_n) = \mu_1(K) + \mu_1(\Omega_n \setminus K).$$

En reprenant les termes extrémaux de l'inégalité précédente, il vient donc, pour tout $n \geq 1$:

$$\mu_1(K) \geq \phi(\varphi_n) - \mu_1(\Omega_n \setminus K) \geq \inf\{\phi(f) \mid f \in \mathcal{C}(X, [0, 1]), \chi_K \leq f\} - \underbrace{\mu_1(\Omega_n \setminus K)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}.$$

En passant à la limite en n , on obtient finalement bien l'inégalité désirée et, finalement, on a bien $\mu_1(K) = \inf\{\phi(f) \mid f \in \mathcal{C}(X, [0, 1]), \chi_K \leq f\}$. La même démonstration fournit la même égalité pour $\mu_2(K)$, ce qui conclut. \square

A.3 Démonstration du théorème ergodique de Birkhoff

Voici une démonstration du théorème de Birkhoff (théorème 25).

Démonstration. ³ Quitte à décomposer f en sa partie négative et sa partie positive, on peut supposer $f \geq 0$. Puisque X est compact et qu'on travaille du point de vue de la mesure, on peut supposer f bornée. Sans perte de généralité, supposons $f \leq 1$.

Pour tout $x \in X$, notons $f^+(x) := \limsup \frac{1}{n} S_n f(x)$ et $f^-(x) := \liminf \frac{1}{n} S_n f(x)$. Si on montre que pour μ -presque tout x on a $f^+(x) \leq \int_X f d\mu$, en considérant $1 - f$ on en déduit $f^-(x) \geq \int_X f d\mu$, ce qui conclurait. Considérons donc un $\varepsilon > 0$ arbitraire et montrons que pour μ -presque tout x , on a l'inégalité $f^+(x) \leq \alpha$, où on a posé $\alpha := \int_X f d\mu + \varepsilon$. En faisant tendre ε vers 0, on aura le résultat escompté.

³ Inspiré d'une note de blog de Joel Moreira : <https://joelmoreira.wordpress.com/2013/01/17/the-ergodic-theorem/>.

On souhaite utiliser l'hypothèse d'unique ergodicité. À cet effet considérons l'ensemble $A := \{x \in X \mid f^+(x) > \alpha\}$ et montrons que A est de mesure nulle. Par construction, il s'agit d'un ensemble stable par Φ , donc $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$. Il nous suffit donc de montrer $\mu(A) < 1$ pour conclure.

Notons, pour tout entier n , l'application définie sur X par $f_n(x) := S_n f(x) - n\alpha$, et pour tout entier n , $F_n := \max\{0, f_1, \dots, f_n\}$. Considérons enfin les ensembles définis pour tout entier n par $A_n := \{x \in X \mid F_n(x) > 0\}$. Comme pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $0 \leq n \leq N$, $F_N \geq f_n$, on a pour tout $0 \leq n \leq N$ et pour tout $x \in X$:

$$F_N(\Phi(x)) + f(x) \geq f_n(\Phi(x)) + f(x) = \sum_{k=0}^n f(\Phi^k(x)) - n\alpha = f_{n+1}(x) + \alpha.$$

En prenant le maximum sur $0 \leq n \leq N$ dans l'inégalité précédente, on a pour tout $x \in X$

$$F_N(\Phi(x)) + f(x) \geq F_{N+1}(x) + \alpha \geq F_N(x) + \alpha,$$

c'est-à-dire

$$f(x) - \alpha \geq F_N(x) - F_N(\Phi(x)).$$

En intégrant cette inégalité sur A_N , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{A_N} f - \alpha d\mu &= \int_{A_N} f d\mu - \alpha \mu(A_N) \\ &\geq \int_{A_N} F_N d\mu - \int_{A_N} F_N \circ \Phi d\mu \\ &= \int_X F_N d\mu - \int_{A_N} F_N \circ \Phi d\mu \\ &\geq \int_X F_N - F_N \circ \Phi d\mu = 0, \text{ puisque } \Phi : X \rightarrow X \text{ est une bijection.} \end{aligned}$$

Puisque f est positive et qu'on a l'inclusion $A_n \subset X$, il vient $\int_X f d\mu \geq \int_{A_n} f d\mu$, et donc en reprenant l'inégalité précédente on obtient

$$\mu(A_N) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f d\mu = \frac{\int_X f d\mu}{\int_X f d\mu + \varepsilon} < 1.$$

Comme la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, on a par propriété de la mesure

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f d\mu < 1.$$

Remarquons enfin que $A = \{x \in X \mid f_n(x) > 0 \text{ pour une infinité d'entiers } n\}$. On a donc l'inclusion $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, et donc finalement $\mu(A) < 1$, ce qui termine la démonstration. \square

A.4 Théorème d'Ascoli

Pour les détails de cette partie, voir par exemple [HL99].

Soit (X, d) un espace métrique compact. Soit $\mathcal{C}(X)$ l'ensemble des fonctions de X vers \mathbb{K} ($= \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) que l'on munit de la norme uniforme $\|f\|_\infty := \max_{x \in X} |f(x)|$.

Une partie d'un espace topologique est dite **relativement compacte** si son adhérence est compacte.

Une partie \mathcal{F} de $\mathcal{C}(X)$ est dite **équicontinue en un point** x_0 de X si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, d(x, x_0) < \eta \implies \forall f \in \mathcal{F}, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Elle est dite **équicontinue** si elle est équicontinue en tout point de X .

Elle est dite **uniformément équicontinue** si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X, d(x, y) < \eta \implies \forall f \in \mathcal{F}, |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Proposition 95. *Comme X est compact, une partie de $\mathcal{C}(X)$ est équicontinue si et seulement si elle est uniformément équicontinue.*

Démonstration. Pour le sens direct on utilise la propriété de Borel-Lebesgue. Le sens réciproque est immédiat. \square

Théorème 96 (Ascoli). *Une partie de $\mathcal{C}(X)$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X)$ si et seulement si elle est bornée et équicontinue.*

A.5 Lemmes sous et sur-additifs

Définition 97. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels.

On dit que (u_n) est **sous-additive** si elle vérifie $u_{n+m} \leq u_n + u_m$ pour tous entiers strictement positifs m, n .

On dit que (u_n) est **sur-additive** si elle vérifie $u_{n+m} \geq u_n + u_m$ pour tous entiers strictement positifs m, n .

Lemme 98. *Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite sous-additive. Alors la suite de terme général u_n/n converge et on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}.$$

De même, si (u_n) est sur-additive, la limite existe et on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = \sup_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}.$$

Démonstration. Faisons la preuve dans le cas sous-additif, le cas sur-additif se traitant de la même manière.

Soit $q \in \mathbb{N}^*$, $n \geq q$ et $n = k_n q + r_n$ la division euclidienne de n par q . Par sous-additivité, on a $u_n = u_{(k_n-1)q+r_n} \leq (k_n-1)u_q + u_{q+r_n}$. En divisant par n , on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{n} &\leq \frac{k_n-1}{n} \cdot u_q + \frac{u_{q+r_n}}{n} = \frac{q(k_n-1)}{n} \cdot \frac{u_q}{q} + \frac{u_{q+r_n}}{n} \\ &\leq \frac{n-r_n-q}{n} \cdot \frac{u_q}{q} + \frac{u_{q+r_n}}{n} \\ &\leq \underbrace{\frac{n-r_n-q}{n}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1} \cdot \frac{u_q}{q} + \underbrace{\frac{1}{n} \max_{0 \leq i \leq q-1} u_{q+i}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0}. \end{aligned}$$

En passant à la lim sup dans la dernière inégalité, on a donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_q}{q}.$$

Cette inégalité étant valable pour tous les entiers $q \geq 1$, on a finalement :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} \leq \inf_{q \geq 1} \frac{u_q}{q} \leq \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{u_q}{q}.$$

Les lim sup et lim inf sont donc égales, ce qui conclut la démonstration. \square

A.6 Lemme de Liouville sur l'approximation rationnelle

Lemme 99 (de Liouville). *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un entier algébrique de degré $d \geq 2$, c'est-à-dire racine d'un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré d et irréductible sur \mathbb{Q} . Il existe alors une constante $K > 0$ telle que pour tout rationnel $p/q \in \mathbb{Q}$, on ait*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{K}{q^d}.$$

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ irréductible sur \mathbb{Q} tel que $P(\alpha) = 0$ et $p/q \in \mathbb{Q}$.

Si $|\alpha - p/q| > 1$, on a déjà le résultat.

Sinon, on a $p/q \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$ et on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à P :

$$|P(p/q) - P(\alpha)| \leq M|\alpha - p/q|, \text{ où } M := \max_{x \in [\alpha-1, \alpha+1]} |P'(x)|.$$

Par ailleurs, comme P est à coefficients entiers, de degré d et qu'il n'a pas de racines rationnelles, on a $q^d P(p/q) \in \mathbb{Z}^*$ donc $|q^d P(p/q)| \geq 1$.

En reprenant l'inégalité précédente et en se rappelant que $P(\alpha) = 0$, on déduit donc :

$$|\alpha - p/q| \geq 1/(Mq^d).$$

Finalement, il suffit de poser $K := \min(1, 1/M)$ pour obtenir le résultat. \square

A.7 Topologie faible et fonctions invariantes sur les distributions stables/instables

Définition 100. Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de H converge faiblement vers $f \in H$ si pour tout $g \in H$, on a

$$\langle f_n, g \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle f, g \rangle.$$

Lemme 101. *Soit H un espace de Hilbert et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H convergeant faiblement. Alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.*

Démonstration. Pour tout $g \in H$, $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$, on dispose de la formule (habile!) suivante :

$$\|f_n\| = \frac{1}{\varepsilon} (\langle f_n, g + \frac{\varepsilon}{\|f_n\|} f_n \rangle - \langle f_n, g \rangle).$$

Ainsi, pour montrer que la suite (f_n) est bornée il suffit de trouver $g \in H$ et $\varepsilon > 0$ vérifiant :

$$\sup\{\langle f_n, h \rangle \mid n \in \mathbb{N}, h \in B(g, \varepsilon)\} < \infty.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il n'existe pas de tels g, ε . On peut alors considérer une suite d'entiers croissante $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de boules fermées dans H décroissante pour l'inclusion et dont le diamètre tend vers 0 tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall h \in B_k, \langle f_{n_k}, h \rangle \geq k.$$

Une intersection décroissante de fermés étant toujours non-vide dans un espace complet, on peut considérer $g_\infty \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k$. Cet élément vérifie alors, pour tout entier k , $\langle f_{n_k}, g_\infty \rangle \geq k$, ce qui contredit la convergence faible de la suite (f_n) .

\square

Théorème 102 (Banach-Saks). Soit H un espace de Hilbert et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H convergeant faiblement vers $f \in H$. Alors la suite sous-converge (fortement) en moyenne de Cesàro vers f : il existe une sous-suite f_{n_1}, f_{n_2}, \dots telle que :

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f_{n_k} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer le résultat pour une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant faiblement vers 0. En effet, pour une fonction $g \in H$, en considérant la suite $(f_n + g)_{n \in \mathbb{N}}$ on a alors le résultat dans le cadre général.

Soit donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant faiblement vers la fonction nulle. On souhaite trouver une sous suite $f_{n_1}, f_{n_2}, \dots, f_{n_k}, \dots$ telle que

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f_{n_k} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

En particulier, le résultat sera démontré si on trouve une sous-suite vérifiant

$$\left\| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f_{n_k} \right\|^2 = \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^m \|f_{n_k}\|^2 + \frac{2}{m^2} \sum_{1 \leq i < j \leq m} \langle f_{n_i}, f_{n_j} \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Il nous suffit donc de construire une sous-suite de norme bornée telle que

$$\sum_{1 \leq i < j \leq m} |\langle f_{n_i}, f_{n_j} \rangle| < +\infty.$$

On construit une telle sous-suite par récurrence : supposons qu'on ait k termes f_{n_1}, \dots, f_{n_k} tels que pour tout $1 \leq i < j \leq k$, on ait $|\langle f_{n_i}, f_{n_j} \rangle| < 1/2^j$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend faiblement vers 0 donc en particulier pour tout $1 \leq i \leq k$, on a $\langle f_{n_i}, f_p \rangle \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$. On peut donc trouver un indice n_{k+1} tel que pour tout $i \leq k$, on ait $\langle f_{n_i}, f_{n_{k+1}} \rangle < 1/2^{k+1}$. En particulier, on a alors

$$\sum_{i < j} |\langle f_{n_i}, f_{n_j} \rangle| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2^j} = 2.$$

On en déduit l'inégalité

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f_{n_k} \right\|^2 &= \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^m \|f_{n_k}\|^2 + \frac{2}{m^2} \sum_{1 \leq i < j \leq m} \langle f_{n_i}, f_{n_j} \rangle \\ &\leq \frac{1}{m} \sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_{n_k}\|^2 + \frac{4}{m^2}, \end{aligned}$$

où la quantité $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_{n_k}\|^2$ est bien définie et finie en vertu du lemme 101. Cette quantité tend bien vers 0, ce qui termine cette preuve. \square

Corollaire 103. Soit (X, Φ, μ) un système dynamique où μ est une mesure de probabilités et $f \in L^2(X)$. Alors les valeurs d'adhérences faibles de la suite $(f \circ \Phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont W^{ss} et W^{su} -invariantes.

Démonstration. Commençons par montrer que les valeurs d'adhérence de $(f \circ \Phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont aussi W^{ss} -invariantes.

Rappelons tout d'abord que sur un espace compact X , l'ensemble des fonctions lipschitziennes est dense dans $L^2(X)$. (On pourra trouver une démonstration de ce fait dans la dernière annexe de [Cou12].) Commençons donc par démontrer le théorème dans ce cadre.

Supposons f lipschitzienne, et soit n_i une suite croissante d'entiers telle que $f \circ \Phi^{n_i}$ converge faiblement vers $\bar{f} \in L^2(X)$. Le théorème de Banach-Saks nous permet de considérer deux suites strictement croissantes d'entiers $(n_{i_k})_k$ et $(m_j)_j$ telles que

$$\Psi_j(x) := \frac{1}{m_j} \sum_{k=1}^{m_j} f \circ \Phi^{n_{i_k}}(x) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \bar{f}(x), \quad \mu - p.p.$$

Maintenant, si $y \in W^{ss}(x)$, en notant K la constante de lipschitz de f , on a :

$$|\Psi_j(x) - \Psi_j(y)| \leq K \frac{1}{m_j} \sum_{k=1}^{m_j} d(\Phi^{n_{i_k}}(x), \Phi^{n_{i_k}}(y)) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 = |\bar{f}(x) - \bar{f}(y)|.$$

La fonction \bar{f} est alors bien W^{ss} -invariante.

Si on ne suppose plus f lipschitzienne, on peut l'approcher par densité : pour $\varepsilon > 0$ fixé, soit g lipschitzienne telle que $\|f - g\| < \varepsilon$. Comme avant, on considère une sous-suite croissante n_{i_l} telle que $g \circ \Phi^{n_{i_l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \bar{g}$. La fonction \bar{g} est donc en particulier W^{ss} -invariante, et elle est proche de \bar{f} : en effet, on a $(f - g) \circ \Phi^{n_{i_j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \bar{f} - \bar{g}$, donc

$$\|\bar{f} - \bar{g}\| \leq \liminf_{n_{i_j}} \|(f - g) \circ \Phi^{n_{i_j}}\| \leq \|f - g\| < \varepsilon.$$

On peut donc trouver une suite de fonctions W^{ss} -invariantes convergeant en norme L^2 vers \bar{f} . Or, un résultat classique (c'est essentiellement la démonstration du théorème de Riesz-Fischer sur la complétude des espaces L^p) dit que si une suite converge pour la norme L^p , alors elle admet une sous-suite qui converge simplement presque partout. Ici, on en déduit donc qu'après extraction, on dispose d'une suite de fonctions W^{ss} -invariantes qui converge simplement μ -presque partout vers \bar{f} . Cela implique que \bar{f} est elle-même W^{ss} -invariante.

Montrons maintenant que les valeurs d'adhérence de $(f \circ \Phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont aussi W^{su} -invariantes. Notons U le sous-espace des fonctions W^{su} -invariantes, et montrons tout d'abord que pour toute fonction $h \in U^\perp$, on a $h \circ \Phi^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Soit donc h une telle fonction et soit \bar{h} une valeur d'adhérence faible quelconque de $(h \circ \Phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec donc une suite strictement croissante (n_i) telle que $h \circ \Phi^{n_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \bar{h}$. On peut appliquer la première partie de notre démonstration à la fonction \bar{h} en remplaçant Φ par Φ^{-1} , et alors les limites faibles (dans le passé pour Φ) deviennent W^{ss} -invariantes pour Φ^{-1} , c'est-à-dire W^{su} -invariantes pour Φ : soit donc une sous-suite n_{i_j} telle que

$$\bar{h} \circ \Phi^{-n_{i_j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \tilde{h} \in U.$$

En se rappelant qu'on a pris h dans U^\perp , on en déduit que \bar{h} est nulle :

$$\langle \bar{h}, \bar{h} \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle h \circ \Phi^{n_{i_j}}, \bar{h} \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle h, \bar{h} \circ \Phi^{-n_{i_j}} \rangle = \langle h, \tilde{h} \rangle = 0.$$

Toutes les valeurs d'adhérence faibles de $(h \circ \Phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc nulles, donc

$$h \circ \Phi^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Reprenons maintenant une fonction $f \in L^2(X)$ quelconque. Elle se décompose en $f = f_1 + f_2$ où $f_1 \in U$ et $f_2 \in U^\perp$. Comme on vient de le montrer, la suite $(f_2 \circ \Phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend faiblement vers 0, donc les valeurs d'adhérence faibles de $(f \circ \Phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont les mêmes que celles de $(f_1 \circ \Phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$, et celles-ci appartiennent toutes à U . C'est le résultat qu'on voulait démontrer! \square

Références

- [AA67] Vladimir Igorevich ARNOLD et André AVEZ. *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*. Gauthier-Villars Paris, 1967.
- [Aud06] Michèle AUDIN. *Géométrie*. EDP Sciences, 2006.
- [CG18] Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries*. Calvage & Mounet, 2018.
- [Cou11] Yves COUDÈNE. « Sur l'ergodicité du flot géodésique en courbure négative ou nulle ». In : *L'Enseignement Mathématique* 57.1 (2011), p. 117-153.
- [Cou12] Yves COUDÈNE. *Théorie ergodique et systèmes dynamiques*. EDP sciences, 2012.
- [FW06] John FRANKS et Bob WILLIAMS. « Anomalous anosov flows ». In : *Global Theory of Dynamical Systems : Proceedings of an International Conference Held at Northwestern University, Evanston, Illinois, June 18–22, 1979*. Springer. 2006, p. 158-174.
- [HF19] Boris HASSELBLATT et Todd FISHER. *Hyperbolic flows*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics, 2019.
- [HL99] Francis HIRSCH et Gilles LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle : cours et exercices avec réponses*. Dunod, 1999.
- [Kat92] Svetlana KATOK. *Fuchsian groups*. University of Chicago press, 1992.
- [KH95] Anatole KATOK et Boris HASSELBLATT. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. 54. Cambridge university press, 1995.
- [Mio17] Martin MION-MOUTON. « Flots Anosov de contact en dimension trois, via les structures lagrangiennes de contact associées ». 2017.
- [PB23] Gilles PAGES et Marc BRIANE. *Analyse-Théorie de l'intégration : Convolution, Transformées de Fourier et de Laplace-L3-M1-Agrégation-Écoles d'ingénieurs*. De Boeck Supérieur, 2023.
- [PS70] Charles PUGH et Michael SHUB. « The Ω -stability theorem for flows ». In : *Inventiones mathematicae* 11.2 (1970), p. 150-158.
- [Sch17] Barbara SCHAPIRA. « Dynamics of geodesic and horocyclic flows ». In : *Ergodic Theory and Negative Curvature : CIRM Jean-Morlet Chair, Fall 2013* (2017), p. 129-155.